Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 6, 951–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 04:17:59

КРИТЕРИЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП

А.И. Штерн

1. Предварительные сведения. Изучение условий непрерывности представлений топологических групп в терминах вариаций в точке началось в [1] (подробное изложение см. в [2]). Напомним соответствующее определение и результаты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00574.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1], [2]. Пусть G – топологическая группа, S – ее представление в нормированном пространстве E . Пусть E^* – пространство, сопряженное к E . Введем слабую вариацию (или слабое колебание) $\omega(S) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G (или, кратко, слабую вариацию представления S), полагая

$$\omega(S) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1; \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1 [1], [2]. Пусть G – топологическая группа, S – ее представление в комплексном банаховом пространстве E . Следующие условия равносильны:

- (1) представление S непрерывно в слабой операторной топологии;
- (2) $\omega(S) = 0$;
- (3) $\omega(S) < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Постоянная 1 в пункте (2) теоремы 1 является наилучшей возможной, как показывает приведенный ниже пример 1.

Универсальная постоянная 1 в пункте (2) теоремы 1 допускает улучшение для представлений локально компактных групп в конечномерных пространствах.

ТЕОРЕМА 2 [1], [2]. Пусть G – связная группа Ли, и пусть S – представление группы G в конечномерном линейном пространстве E . Если $\omega(S) < 2$, то представление S непрерывно.

Постоянная 2 является наилучшей возможной (см. пример 3 ниже).

ТЕОРЕМА 3 [1], [2]. Пусть G – локально компактная группа, и пусть S – представление группы G в конечномерном пространстве E . Если $\omega(S) < \sqrt{3}$, то представление S непрерывно.

Постоянная $\sqrt{3}$ является наилучшей возможной (см. пример 4 ниже).

2. Формулировка результатов. Мищенко высказал гипотезу, что для связных локально компактных групп постоянная $\sqrt{3}$ может быть улучшена до 2. Эта гипотеза оказывается справедливой.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – связная локально компактная группа, и пусть S – представление группы G в конечномерном линейном пространстве E . Если $\omega(S) < 2$, то представление S непрерывно.

В частном случае компактных связных групп теорема 4 доказана в [3] с помощью структурных результатов, приведенных в [4]. В свою очередь, теорема 4 позволяет установить следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – локально компактная группа. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Следующие условия равносильны:

- (1) существует такая открытая почти связная подгруппа $O \subset G$, что любое конечномерное представление S группы O , удовлетворяющее условию $\omega(S) < 2 \sin(\pi p / (2p + 1))$, непрерывно;
- (2) существует такая открытая почти связная подгруппа H группы G , что все нормальные делители нечетного индекса, меньшего $2p + 1$, в любом открытом нормальном делителе группы H замкнуты.

Если условия (1), (2) выполнены, то любое конечномерное представление S группы G , удовлетворяющее условию $\omega(S) < 2 \sin(\pi p / (2p + 1))$, непрерывно.

Следующие условия также равносильны:

- (3) существует такая открытая почти связная подгруппа $O \subset G$, что любое конечномерное представление S группы O , удовлетворяющее условию $\omega(S) < 2$, непрерывно;

- (4) *существует такая открытая почти связная подгруппа H группы G , что все нормальные делители нечетного индекса в любом открытом нормальном делителе группы H замкнуты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА используют методы работ [1] и [2] и структурные теоремы [4]–[7]. Следует отметить, что аналог теоремы 4 для топологических групп неверен даже в классе коммутативных псевдокомпактных групп, как показывает пример 5.

3. Примеры. Приведем обещанные примеры. Проверка предоставляется читателю.

ПРИМЕР 1. Пусть $G = \mathbb{R}$, $E = l^2(\mathbb{R})$, S – представление группы G в E сдвигами. Тогда $\omega(S) = 1$, и представление S разрывно.

ПРИМЕР 2. Пусть $G = \mathbb{R}$, E – замыкание конечных линейных комбинаций характеристических функций точек в банаховом пространстве ограниченных функций на $\mathbb{R}$ с обычной равномерной нормой, S – представление группы G в E сдвигами. Тогда сильная вариация представления S в единичном элементе группы G (см. [1], [2]) равна 1, и представление S разрывно.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \mathbb{T}$, S – одномерный характер группы G , все неединичные значения которого имеют бесконечный порядок (см., например, [1, (25.26) (e)]). Тогда $\omega(S) = 2$, и представление S разрывно.

ПРИМЕР 4. Пусть G – прямое произведение счетного набора групп третьего порядка, реализованных в виде корней из единицы на комплексной плоскости,

$$\mathbb{T}_3 = \{1, \cos(2\pi/3) \pm i\sin(2\pi/3)\};$$

занумеруем эти группы натуральными числами. Рассмотрим некоторый свободный ультрафильтр α на натуральном ряде и введем одномерный характер S группы G с помощью формулы $S(g) = \alpha((g_n))$ для $g = (g_n) \in G$, где $g_n \in \mathbb{T}_3$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\omega(S) = \sqrt{3}$ и представление S разрывно.

ПРИМЕР 5. Пусть α – несчетное кардинальное число и G – подгруппа группы $\mathbb{T}^\alpha$, образованная элементами, у которых множество координат, в которых принимается значение не из группы $\mathbb{T}_3$ (см. пример 4) не более чем счетно. Группа G псевдокомпактна, поскольку она содержит подгруппу $\Sigma \subset \mathbb{T}^\alpha$, образованную элементами $t \in \mathbb{T}^\alpha$, у которых множество координат, в которых принимается неединичное значение, не более чем счетно (см. § 3 в [8]). Пополнением Вейля группы G является группа $\mathbb{T}^\alpha$, потому что это верно уже для меньшей подгруппы Σ . Группа G связна, потому что ее пополнение Вейля связно. Рассмотрим некоторый максимальный идеал α факторалгебры алгебры A ограниченных комплексных функций на множестве ординалов, меньших α , по замкнутому идеалу функций с не более чем счетным носителем. Пусть χ_α – соответствующий характер алгебры A . Введем одномерный характер S группы G с помощью формулы $S(g) = \chi_\alpha((g_\xi))$ для $g = (g_\xi) \in G$, $\xi < \alpha$. Тогда $\omega(S) = \sqrt{3} < 2$, и при этом представление S разрывно.

Автор благодарен А. С. Мищенко за внимание к работе и рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shtern A. I. // Russian J. Math. Phys. 2002. V. 9. № 2. P. 251–253.
2. Штерн А. И. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 9. С. 139–156.
3. Shtern A. I. // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). 2004. V. 8. № 1. P. 13–22.
4. Hofmann K. H., Morris S. A. The Structure of Compact Groups. Berlin: de Gruyter, 1998.
5. Хьюитт Э., Росс К. А. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
6. Iwasawa K. // Ann. of Math. 1949. V. 50. № 2. P. 507–558.
7. Montgomery D., Zippin L. Topological Transformation Groups. New York: Interscience Publ., 1955.
8. Comfort W. W., van Mill J. // Topology Appl. 1989. V. 33. № 1. P. 21–45.