Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе, Задача Коши–Гурса для волновых уравнений с нелинейным диссипативным членом, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 889–907

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:35:04

Задача Коши–Гурса для волновых уравнений с нелинейным диссипативным членом

С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе

Исследуется задача Коши–Гурса для волновых уравнений с нелинейным диссипативным членом. Рассматриваются вопросы существования, единственности и отсутствия глобального решения этой задачи. Обсуждается также вопрос о локальной разрешимости поставленной задачи.

Библиография: 26 названий.

DOI: 10.4213/mzm5617

1. Постановка задачи. В плоскости независимых переменных x и t рассмотрим волновое уравнение с нелинейным диссипативным членом [1; с. 57], [2]

$$Lu := u_{tt} - u_{xx} + g(x, t, u)u_t = f(x, t), \quad (1.1)$$

где f, g – заданные, а u – искомая действительные функции.

Обозначим через $D_T := \{(x, t) : 0 < x < t, 0 < t < T\}$ треугольную область, ограниченную характеристическим отрезком $\gamma_{1,T}: x = t, 0 \leq t \leq T$, а также отрезками $\gamma_{2,T}: x = 0, 0 \leq t \leq T$, $\gamma_{3,T}: t = T, 0 \leq x \leq T$.

Для уравнения (1.1) в области D_T рассмотрим задачу Коши–Гурса об определении решения $u(x, t)$ по условиям [3; с. 284]

$$u_x|_{\gamma_{2,T}} = 0, \quad u|_{\gamma_{1,T}} = 0. \quad (1.2)$$

Отметим, что для нелинейных уравнений гиперболического типа вопросам существования, единственности и отсутствия глобальных решений начальных, смешанных, нелокальных и других задач посвящено много работ (см., например, [4]–[18]). В линейном случае, т.е. при $g(x, t, u) = g(x, t)$ задача (1.1), (1.2), как известно, корректно поставлена и имеет место глобальная разрешимость в соответствующих пространствах функций (см., например, [1], [19]–[23]).

Ниже будет показано, что при определенных требованиях на нелинейную функцию $g(x, t, u)$ задача (1.1), (1.2) локально разрешима; получены условия глобальной разрешимости, нарушение которых, вообще говоря, может стать причиной разрушения решения за конечный момент времени.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 05-1000008-7921), а также Грузинского национального фонда (грант № GNSF/ST06/3-005).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $f \in C(\overline{D}_T)$, $g \in C(\overline{D}_T \times \mathbb{R})$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$. Функцию u будем называть *сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2)* класса C^1 в области D_T , если $u \in C^1(\overline{D}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что $u_n \rightarrow u$ и $Lu_n \rightarrow f$ при $n \rightarrow \infty$ соответственно в пространствах $C^1(\overline{D}_T)$ и $C(\overline{D}_T)$, где

$$\dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T) := \{v \in C^2(\overline{D}_T) : v_x|_{\gamma_{2,T}} = 0, v|_{\gamma_{1,T}} = 0\}, \quad \Gamma_T := \gamma_{1,T} \cup \gamma_{2,T}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Очевидно, что классическое решение задачи (1.1), (1.2) из пространства $u \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ является сильным обобщенным решением этой задачи класса C^1 в области D_T . В свою очередь, если сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T принадлежит пространству $C^2(\overline{D}_T)$, то оно будет также и классическим решением этой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $f \in C(\overline{D}_\infty)$, $g \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbb{R})$. Мы будем говорить, что задача (1.1), (1.2) *глобально разрешима в классе C^1* , если для любого конечного $T > 0$ эта задача имеет сильное обобщенное решение класса C^1 в области D_T .

2. Априорные оценки решения задачи (1.1), (1.2) в классах $C(\overline{D}_T)$, $C^1(\overline{D}_T)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $f \in C(\overline{D}_T)$, $g \in C(\overline{D}_T \times \mathbb{R})$ и

$$g(x, t, s) \geq -M_T, \quad (x, t, s) \in \overline{D}_T \times \mathbb{R}, \quad M_T := \text{const} > 0. \quad (2.1)$$

Тогда для сильного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq c_0 \|f\|_{C(\overline{D}_T)} \quad (2.2)$$

с положительной постоянной $c_0 = c_0(T, M_T)$, не зависящей от u и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T . Тогда в силу определения 1.1 существует такая последовательность функций $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C^1(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad (2.3)$$

а, следовательно, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g(x, t, u_n)u_{nt} - g(x, t, u)u_t\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \quad (2.4)$$

Рассмотрим функцию $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ как решение следующей задачи:

$$Lu_n = f_n, \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|_{\gamma_{2,T}} = 0, \quad u_n|_{\gamma_{1,T}} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь

$$f_n := Lu_n. \quad (2.7)$$

Умножая обе части равенства (2.5) на $\partial u_n / \partial t$ и интегрируя полученное равенство по области $D_\tau := \{(x, t) \in D_T : 0 < t < \tau\}$, $0 < \tau \leq T$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{D_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt - \int_{D_\tau} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt + \int_{D_\tau} g(x, t, u_n) \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &= \int_{D_\tau} f_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt. \end{aligned}$$

Положим $\Omega_\tau := \overline{D}_\infty \cap \{t = \tau\}$, $0 < \tau \leq T$. Тогда с учетом (2.6), применяя формулу Грина к левой части последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} \int_{D_\tau} f_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt &= \int_{\gamma_{1,\tau}} \frac{1}{2\nu_t} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \nu_t - \frac{\partial u_n}{\partial t} \nu_x \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 (\nu_t^2 - \nu_x^2) \right] ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \int_{D_\tau} g(x, t, u_n) \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ и $\gamma_{1,\tau} := \gamma_{1,T} \cap \{t \leq \tau\}$.

Принимая во внимание, что оператор $\nu_t (\partial / \partial x) - \nu_x (\partial / \partial t)$ является внутренним дифференциальным оператором на $\gamma_{1,T}$, в силу второго условия (2.6) будем иметь

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \nu_t - \frac{\partial u_n}{\partial t} \nu_x \right) \Big|_{\gamma_{1,\tau}} = 0. \quad (2.9)$$

Далее, легко видеть, что

$$(\nu_t^2 - \nu_x^2)|_{\gamma_{1,\tau}} = 0. \quad (2.10)$$

Следовательно, из (2.8)–(2.10) имеем

$$w_n(\tau) := \int_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 \right] dx \leq 2 \int_{D_\tau} f_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt + 2M_T \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (2.11)$$

Принимая во внимание неравенство

$$2f_n \frac{\partial u_n}{\partial t} \leq \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + f_n^2,$$

в силу (2.11) получим

$$w_n(\tau) \leq (1 + 2M_T) \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_{D_\tau} f_n^2 dx dt.$$

Учитывая выражение для функции $w_n(\tau)$, отсюда получим, что

$$w_n(\tau) \leq m_T \int_0^\tau w_n(\sigma) d\sigma + \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2,$$

где $m_T := \max(1 + 2M_T, 1)$. Отсюда, поскольку величина $\|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2$ как функция от τ является неубывающей, в силу леммы Гронуолла [24; с. 13] будем иметь

$$w_n(\tau) \leq \exp(m_T \tau) \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2. \quad (2.12)$$

Если $(x, t) \in \overline{D}_T$, то в силу второго условия (2.6) имеет место равенство

$$u_n(x, t) = u_n(x, t) - u_n(t, t) = \int_t^x \frac{\partial u_n(\sigma, t)}{\partial x} d\sigma,$$

откуда в силу (2.12) следует

$$\begin{aligned} |u_n(x, t)|^2 &\leq \int_x^t d\sigma \int_x^t \left[\frac{\partial u_n(\sigma, t)}{\partial x} \right]^2 d\sigma \leq (t-x) \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial u_n(\sigma, t)}{\partial x} \right]^2 d\sigma \\ &\leq (t-x) w_n(t) \leq t w_n(t) \leq T \exp(m_T T) \|f_n\|_{C(\overline{D}_T)}^2 \operatorname{mes} D_T \\ &= 2^{-1} T^3 \exp(m_T T) \|f_n\|_{C(\overline{D}_T)}^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.13) получаем

$$\|u_n\|_{C(\overline{D}_T)} \leq T \sqrt{\frac{T}{2}} \exp\left(\frac{m_T T}{2}\right) \|f_n\|_{C(\overline{D}_T)}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, в силу (2.3), (2.7) будем иметь

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leq T \sqrt{\frac{T}{2}} \exp\left(\frac{m_T T}{2}\right) \|f\|_{C(\overline{D}_T)}. \quad (2.14)$$

Этим оценка (2.2) доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из (2.14) следует, что постоянную c_0 в оценке (2.2) можно взять равной

$$c_0 := T \sqrt{\frac{T}{2}} \exp\left(\frac{m_T T}{2}\right). \quad (2.15)$$

Ниже, используя классический метод характеристик и принимая во внимание (2.2), мы получим априорную оценку в пространстве $C^1(\overline{D}_T)$ для сильного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T .

Имеет место следующая

ЛЕММА 2.2. При условиях леммы 2.1 для сильного обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{C^1(\overline{D}_T)} \leq c_1 \quad (2.16)$$

с положительной постоянной $c_1 = c_1(T, c_0, \|f\|_{C(\overline{D}_T)})$, где

$$\|u\|_{C^1(\overline{D}_T)} := \max\{\|u\|_{C(\overline{D}_T)}, \|u_x\|_{C(\overline{D}_T)}, \|u_t\|_{C(\overline{D}_T)}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T . Тогда справедливы предельные равенства (2.3), (2.4), где u_n можно рассматривать как решение задачи (2.5), (2.6) с правой частью f_n из (2.7). Для фиксированного натурального n введем следующие функции:

$$u_{n1} := u_{nt} - u_{nx}, \quad u_{n2} := u_{nt} + u_{nx}, \quad u_{n3} := u_n, \quad (2.17)$$

которые с учетом (2.2) при $0 \leq t \leq T$ удовлетворяют граничным условиям

$$u_{n1}(0, t) = u_{n2}(0, t), \quad u_{n2}(t, t) = 0, \quad u_{n3}(t, t) = 0. \quad (2.18)$$

В силу (1.1) и (2.17) неизвестные функции u_{n1} , u_{n2} , u_{n3} удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n1}}{\partial x} = f_n(x, t) - \frac{1}{2} g(x, t, u_{n3})(u_{n1} + u_{n2}), \\ \frac{\partial u_{n2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{n2}}{\partial x} = f_n(x, t) - \frac{1}{2} g(x, t, u_{n3})(u_{n1} + u_{n2}), \\ \frac{\partial u_{n3}}{\partial t} - \frac{\partial u_{n3}}{\partial x} = u_{n1}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Интегрируя уравнения системы (2.19) вдоль соответствующих характеристических кривых и учитывая граничные условия (2.18), получим

$$\begin{cases} u_{n1}(x, t) - u_{n1}(0, t) = \int_{t-x}^t \left[f_n(P_\tau) - \frac{1}{2} g(P_\tau, u_{n3}(P_\tau))(u_{n1}(P_\tau) + u_{n2}(P_\tau)) \right] d\tau, \\ u_{n2}(x, t) = \int_{(x+t)/2}^t \left[f_n(Q_\tau) - \frac{1}{2} g(Q_\tau, u_{n3}(Q_\tau))(u_{n1}(Q_\tau) + u_{n2}(Q_\tau)) \right] d\tau, \\ u_{n3}(x, t) = \int_{(x+t)/2}^t u_{n1}(Q_\tau) d\tau, \end{cases}$$

где $P_\tau := (x - t + \tau, \tau)$, $Q_\tau := (x + t - \tau, \tau)$.

Из второго уравнения полученной системы и первого равенства (2.18) с учетом обозначения $P_{\tau_0} := (t - \tau, \tau)$ вытекает, что эта система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} u_{n1}(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{t-x}^t [g(P_\tau, u_{n3}(P_\tau))(u_{n1}(P_\tau) + u_{n2}(P_\tau))] d\tau \\ \quad - \frac{1}{2} \int_{t/2}^t [g(P_{\tau_0}, u_{n3}(P_{\tau_0}))(u_{n1}(P_{\tau_0}) + u_{n2}(P_{\tau_0}))] d\tau + F_{n1}(x, t), \\ u_{n2}(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t g(Q_\tau, u_{n3}(Q_\tau))(u_{n1}(Q_\tau) + u_{n2}(Q_\tau)) d\tau + F_{n2}(x, t), \\ u_{n3}(x, t) = \int_{(x+t)/2}^t u_{n1}(Q_\tau) d\tau. \end{cases} \quad (2.20)$$

Здесь

$$F_{n1}(x, t) := \int_{t-x}^t f_n(P_\tau) d\tau + \int_{t/2}^t f_n(P_{\tau_0}) d\tau, \quad F_{n2}(x, t) := \int_{(x+t)/2}^t f_n(Q_\tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Переходя в равенствах (2.20), (2.21) к пределу при $n \rightarrow \infty$ в пространстве $C(\overline{D}_T)$ и принимая во внимание (2.3), (2.4), (2.7) и (2.17), будем иметь

$$\begin{cases} u_1(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{t-x}^t [g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau) + u_2(P_\tau))] d\tau \\ \quad - \frac{1}{2} \int_{t/2}^t [g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0}) + u_2(P_{\tau_0}))] d\tau + F_1(x, t), \\ u_2(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau) + u_2(Q_\tau)) d\tau + F_2(x, t), \\ u_3(x, t) = \int_{(x+t)/2}^t u_1(Q_\tau) d\tau, \end{cases} \quad (2.22)$$

где $u_i := \lim_{n \rightarrow \infty} u_{ni}$ (по норме пространства $C(\overline{D}_T)$), $i = 1, 2, 3$, и

$$F_1(x, t) := \int_{t-x}^t f(P_\tau) d\tau + \int_{t/2}^t f(P_{\tau_0}) d\tau, \quad F_2(x, t) := \int_{(x+t)/2}^t f(Q_\tau) d\tau. \quad (2.23)$$

Очевидно, что $u_3 = u$ и она является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T . При этом

$$u_1 := u_t - u_x, \quad u_2 := u_t + u_x. \quad (2.24)$$

Пусть $G_T := \{(x, t, s) \in \mathbb{R}^3 : (x, t) \in \overline{D}_T, |s| \leq c_0 \|f\|_{C(\overline{D}_T)}\}$ и

$$K := \sup_{(x, t, s) \in G_T} |g(x, t, s)| < +\infty, \quad (2.25)$$

где $K = K(T, c_0, \|f\|_{C(\overline{D}_T)})$.

Тогда в силу априорной оценки (2.2) для сильного обобщенного решения $u_3 = u$ задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T получим

$$|g(x, t, u_3(x, t))| \leq K, \quad (x, t) \in \overline{D}_T, \quad (2.26)$$

Пусть

$$v_i(t) := \sup_{(\xi, \tau) \in \overline{D}_t} |u_i(\xi, \tau)|, \quad i = 1, 2, 3, \quad F(t) := \sup_{(\xi, \tau) \in \overline{D}_t} |f(\xi, \tau)|. \quad (2.27)$$

Из (2.22) в силу (2.23), (2.26) и (2.27) следует, что

$$\begin{aligned} |u_1(x, t)| &\leq K \int_0^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau + 2tF(t), \\ |u_2(x, t)| &\leq \frac{K}{2} \int_0^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau + tF(t), \\ |u_3(x, t)| &\leq \int_0^t v_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда при $(\xi, \tau) \in \overline{D}_t$ будем иметь

$$\begin{aligned} |u_1(\xi, \tau)| &\leq K \int_0^\tau (v_1(\tau_1) + v_2(\tau_1)) d\tau_1 + 2\tau F(\tau), \\ |u_2(\xi, \tau)| &\leq \frac{K}{2} \int_0^\tau (v_1(\tau_1) + v_2(\tau_1)) d\tau_1 + \tau F(\tau), \\ |u_3(\xi, \tau)| &\leq \int_0^\tau v_1(\tau_1) d\tau_1 \end{aligned}$$

и, следовательно, в силу (2.27) и того факта, что $tF(t)$ является неубывающей функцией, получим

$$\begin{aligned} v_1(t) &\leq K \int_0^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau + 2tF(t), \\ v_2(t) &\leq \frac{K}{2} \int_0^t (v_1(\tau) + v_2(\tau)) d\tau + tF(t), \\ v_3(t) &\leq \int_0^t v_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Полагая $v(t) := \max_{1 \leq i \leq 3} v_i(t)$, из полученных неравенств будем иметь

$$v(t) \leq 2K \int_0^t v(\tau) d\tau + 2tF(t),$$

откуда, применяя лемму Гронсуолла, получим

$$v(t) \leq 2tF(t) \exp(2tK) \leq 2T \exp(2TK) \|f\|_{C(\overline{D}_T)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Теперь из (2.24) легко следует, что

$$\|u\|_{C^1(\overline{D}_T)} \leq \|v\|_{C[0,T]} \leq 2T \exp(2TK) \|f\|_{C(\overline{D}_T)}.$$

Лемма 2.2 доказана, причем

$$c_1 := 2T \exp(2TK) \|f\|_{C(\overline{D}_T)}, \quad (2.28)$$

где K определяется из (2.25).

3. Эквивалентность задачи (1.1), (1.2) системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра и ее локальная разрешимость. Прежде всего покажем, что задача (2.5), (2.6) эквивалентна задаче (2.19), (2.18) в классическом смысле. Действительно, если $u_n \in C^2$ – решение задачи (2.5), (2.6), то система функций u_{n1} , u_{n2} и u_{n3} будет, очевидно, решением задачи (2.19), (2.18). Обратно, пусть $u_{n1}, u_{n2}, u_{n3} \in C^1$ – решения задачи (2.19), (2.18). Покажем, что $u_n := u_{n3} \in C^2$ – решение задачи (2.5), (2.6) и удовлетворяет равенствам (2.17). Если мы покажем, что $u_{n2} = u_{nt} + u_{nx}$, то, очевидно, будут иметь место равенства $u_{nt} = (u_{n2} + u_{n1})/2$ и $u_{nx} = (u_{n2} - u_{n1})/2$, откуда непосредственно будет следовать, что $u_n \in C^2$ является решением задачи (2.5), (2.6) в классическом смысле.

Действительно, из первого и второго уравнений системы (2.19) следует, что

$$\frac{\partial u_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n1}}{\partial x} = \frac{\partial u_{n2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{n2}}{\partial x}. \quad (3.1)$$

Далее, поскольку $u_{n1} \in C^1$, из третьего уравнения системы (2.19) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{n3} \in C \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{n3} \in C.$$

Отсюда, принимая во внимание, что операторы дифференцирования первого порядка с постоянными коэффициентами перестановочны, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{n3} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} u_{n3} \in C, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{n3} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} u_{n3} \in C. \end{aligned}$$

С учетом этих равенств, (3.1) и третьего равенства системы (2.19) имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) (u_{n2} - u_{nt} - u_{nx}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_{n2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_n - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_n \\ &= \frac{\partial u_{n2}}{\partial t} - \frac{\partial u_{n2}}{\partial x} - \frac{\partial u_{n1}}{\partial t} - \frac{\partial u_{n1}}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу второго и третьего равенств из (2.18) заключаем, что $u_{n2} = u_{nt} + u_{nx}$. Этим доказана эквивалентность задач (2.5), (2.6) и (2.19), (2.18) в классическом смысле.

Выше мы привели редукцию задачи (1.1), (1.2) к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22). Прежде чем рассмотреть вопрос о локальной разрешимости задачи (1.1), (1.2), сделаем следующее замечание, которое непосредственно вытекает из рассуждений, приведенных в п. 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть u является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T , тогда $u_1 := u_t - u_x$, $u_2 := u_t + u_x$, $u_3 := u$ является непрерывным решением системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22). И наоборот, если u_1 , u_2 , u_3 – непрерывное решение системы (2.22), то $u := u_3$ является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T , причем справедливы равенства $u_1 := u_t - u_x$, $u_2 := u_t + u_x$.

Теперь приступим к доказательству локальной разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22).

Пусть

$$f \in C(\overline{D}_\infty), \quad f_\infty := \sup_{(x,t) \in \overline{D}_\infty} |f(x,t)| < +\infty, \quad g \in C(\overline{D}_\infty \times \mathbb{R}) \quad (3.2)$$

и для $(x,t) \in \overline{D}_\infty$ и s , s_1 , s_2 таких, что $|s|, |s_1|, |s_2| \leq R$, выполнено

$$|g(x,t,s)| \leq M(R), \quad |g(x,t,s_2) - g(x,t,s_1)| \leq c(R)|s_2 - s_1|, \quad (3.3)$$

где $M(R)$ и $c(R)$ – некоторые неотрицательные непрерывные функции аргумента $R \geq 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям (3.2), (3.3). Тогда найдется положительное число $T_* := T_*(f, g)$ такое, что при $T \leq T_*$ задача (1.1), (1.2) будет иметь хотя бы одно сильное обобщенное решение и класса C^1 в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 3.1 задача (1.1), (1.2) в пространстве $C^1(\overline{D}_T)$ эквивалентна системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (2.22) в классе $C(\overline{D}_T)$. Однозначную разрешимость системы (2.22) ниже мы докажем принципом сжатых отображений [26; с. 390].

Положим $U := (u_1, u_2, u_3)$. Введем векторный оператор $\Phi := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, действующий по формуле

$$\left\{ \begin{aligned} (\Phi_1 U)(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_{t-x}^t g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau) + u_2(P_\tau)) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t/2}^t g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0}) + u_2(P_{\tau_0})) d\tau + F_1(x, t), \\ (\Phi_2 U)(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau) + u_2(Q_\tau)) d\tau + F_2(x, t), \\ (\Phi_3 U)(x, t) &= \int_{(x+t)/2}^t u_1(Q_\tau) d\tau. \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

Тогда систему (2.22) можно переписать в векторном виде

$$U = \Phi U. \quad (3.5)$$

Пусть

$$\|U\|_{X_T} := \max_{1 \leq i \leq 3} \{\|u_i\|_{C(\overline{D}_T)}\}, \quad U \in X_T := C(\overline{D}_T; \mathbb{R}^3),$$

где $C(\overline{D}_T; \mathbb{R}^3)$ – множество непрерывных вектор-функций $U: \overline{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Обозначим через $B_R := \{U \in X_T : \|U\|_{X_T} \leq R\}$ замкнутый шар радиуса $R > 0$ в банаховом пространстве X_T с центром в нулевом элементе.

Ниже докажем, что

- (1) Φ отображает шар B_R в себя;
- (2) Φ является сжимающим отображением на B_R .

Действительно, в силу первого неравенства (3.3) из (3.4) для U такого, что $\|U\|_{X_T} \leq R$, имеем

$$\begin{aligned} |(\Phi_1 U)(x, t)| &\leq 2T(RM(R) + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}), \\ |(\Phi_2 U)(x, t)| &\leq T(RM(R) + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}), \quad |(\Phi_3 U)(x, t)| \leq TR. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что

$$\|\Phi U\|_{X_T} \leq 2T(RM(R) + R + \|f\|_{C(\overline{D}_T)}) \leq 2T(RM(R) + R + f_\infty),$$

где f_∞ определено в (3.2).

Потребуем, чтобы при фиксированном $R > 0$ величина T была столь малой, чтобы

$$2T(RM(R) + R + f_\infty) \leq R, \quad (3.6)$$

т.е. $\Phi U \in B_R$ и, тем самым, условие (1) выполнено.

Далее, в силу (3.3) из (3.4) для U^i такого, что $\|U^i\|_{X_T} \leq R$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} & |(\Phi_1 U^2 - \Phi_1 U^1)(x, t)| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{t-x}^t (|g(P_\tau, u_3^2(P_\tau)) - g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))| |u_1^2(P_\tau) + u_2^2(P_\tau)| \\ & \quad + |g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))| |u_1^2(P_\tau) - u_1^1(P_\tau) + u_2^2(P_\tau) - u_2^1(P_\tau)|) d\tau \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{t/2}^t (|g(P_\tau, u_3^2(P_\tau)) - g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))| |u_1^2(P_\tau) + u_2^2(P_\tau)| \\ & \quad + |g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))| |u_1^2(P_\tau) - u_1^1(P_\tau) + u_2^2(P_\tau) - u_2^1(P_\tau)|) d\tau \\ & \leq 2T[Rc(R) + M(R)] \|U^2 - U^1\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & |(\Phi_2 U^2 - \Phi_2 U^1)(x, t)| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t (|g(Q_\tau, u_3^2(Q_\tau)) - g(Q_\tau, u_3^1(Q_\tau))| |u_1^2(Q_\tau) + u_2^2(Q_\tau)| \\ & \quad + |g(Q_\tau, u_3^1(Q_\tau))| |u_1^2(Q_\tau) - u_1^1(Q_\tau) + u_2^2(Q_\tau) - u_2^1(Q_\tau)|) d\tau \\ & \leq T[Rc(R) + M(R)] \|U^2 - U^1\|_{X_T}, \end{aligned}$$

$$|(\Phi_3 U^2 - \Phi_3 U^1)(x, t)| \leq \int_{(x+t)/2}^t |u_1^2(Q_\tau) - u_1^1(Q_\tau)| d\tau \leq T \|U^2 - U^1\|_{X_T}.$$

Пусть при фиксированном $R > 0$ число T является столь малым, что

$$\max\{T, 2T(Rc(R) + M(R))\} \leq \frac{1}{2} < 1, \quad (3.7)$$

и, тем самым, $\|\Phi U^2 - \Phi U^1\|_{X_T} \leq (1/2) \|U^2 - U^1\|_{X_T}$. Таким образом, оператор Φ является сжимающим отображением на множестве B_R , т.е. условие (2) выполнено.

Из (3.6) и (3.7) в свою очередь следует, что если $0 < T \leq T_*$, где

$$T_* := \min \left\{ \frac{R}{2(RM(R) + R + f_\infty)}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4(Rc(R) + M(R))} \right\}, \quad (3.8)$$

тогда $\|\Phi U\|_{X_T} \leq R$ и $\|\Phi U^2 - \Phi U^1\|_{X_T} \leq (1/2) \|U^2 - U^1\|_{X_T}$ для $U, U^1, U^2 \in B_R$. Поэтому в силу принципа о сжимающем отображении существует решение U уравнения (3.5) в пространстве $C(\overline{D}_T; \mathbb{R}^3)$. Теорема 3.1 доказана.

4. Случай глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2). Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия (2.1), (3.2) и (3.3). Тогда для любого $T > 0$ задача (1.1), (1.2) имеет сильное обобщенное решение класса C^1 в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено в замечании 3.1, задача (1.1), (1.2) в классе $C^1(\overline{D}_T)$ эквивалентна системе нелинейных интегральных уравнений (2.22) в классе $C(\overline{D}_T)$. В силу (3.2), (3.3) справедливость этой теоремы при достаточно малых T ,

а именно при $T \leq T_*$, где T_* дается равенством (3.8), следует из теоремы 3.1. Пусть теперь $T > T_*$, а $U^{T_*} := (u_1^{T_*}, u_2^{T_*}, u_3^{T_*})$ – решение системы нелинейных интегральных уравнений (2.22) или, что то же самое, векторного уравнения (3.5) в области D_{T_*} класса $C(\overline{D}_{T_*})$ согласно теореме 3.1. Для $t > \Delta t_1 := T_*$ систему (2.22) перепишем в виде

$$\begin{cases} u_1(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_1(x, t, \Delta t_1)}^t g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau) + u_2(P_\tau)) d\tau \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\alpha_2(x, t, \Delta t_1)}^t g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0}) + u_2(P_{\tau_0})) d\tau + F_{1, \Delta t_1}(x, t), \\ u_2(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_3(x, t, \Delta t_1)}^t g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau) + u_2(Q_\tau)) d\tau + F_{2, \Delta t_1}(x, t), \\ u_3(x, t) = \int_{\alpha_3(x, t, \Delta t_1)}^t u_1(Q_\tau) d\tau + F_{3, \Delta t_1}(x, t), \end{cases} \quad (4.1)$$

где

$$\alpha_1(x, t, \Delta t_1) := \max(\Delta t_1, t - x), \quad \alpha_2(x, t, \Delta t_1) := \max\left(\Delta t_1, \frac{t}{2}\right), \\ \alpha_3(x, t, \Delta t_1) := \max\left(\Delta t_1, \frac{x + t}{2}\right);$$

$$\begin{cases} F_{1, \Delta t_1}(x, t) := -\frac{1}{2} \int_{t-x}^{\alpha_1(x, t, \Delta t_1)} g(P_\tau, u_3^{T_*}(P_\tau))(u_1^{T_*}(P_\tau) + u_2^{T_*}(P_\tau)) d\tau \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{t/2}^{\alpha_2(x, t, \Delta t_1)} g(P_{\tau_0}, u_3^{T_*}(P_{\tau_0}))(u_1^{T_*}(P_{\tau_0}) + u_2^{T_*}(P_{\tau_0})) d\tau + F_1(x, t), \\ F_{2, \Delta t_1}(x, t) := -\frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^{\alpha_3(x, t, \Delta t_1)} g(Q_\tau, u_3^{T_*}(Q_\tau))(u_1^{T_*}(Q_\tau) + u_2^{T_*}(Q_\tau)) d\tau + F_2(x, t), \\ F_{3, \Delta t_1}(x, t) := \int_{(x+t)/2}^{\alpha_3(x, t, \Delta t_1)} u_1^{T_*}(Q_\tau) d\tau. \end{cases} \quad (4.2)$$

Поскольку выполняются условия леммы 2.2, то при любом положительном $\tau \leq T$ для решения векторного уравнения (3.5) в области D_τ класса $C(\overline{D}_\tau)$ справедлива априорная оценка

$$\|U\|_{C(\overline{D}_\tau)} \leq R^T(\|f\|_{C(\overline{D}_\tau)}), \quad (4.3)$$

где $R^T = R^T(s)$ – неубывающая непрерывная функция своего аргумента $s \geq 0$.

Положим $R_* := R^T(\|f\|_{C(\overline{D}_T)})$.

В качестве Δt_2 второго шага по t возьмем

$$\Delta t_2 := \min\left\{\frac{1}{4M(R_1)R_*}, \frac{1}{4c(R_1)R_*}\right\}, \quad (4.4)$$

где

$$R_1 := 1 + 2TM(R_*)R_* + \|F\|_{C(\overline{D}_T)}, \quad F := (F_1, F_2, F_3). \quad (4.5)$$

Систему уравнений (4.1) при $t \in [T_*, T_* + \Delta t_2]$ перепишем в виде одного векторного уравнения

$$U = \Psi U, \quad (4.6)$$

где оператор $\Psi := (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ действует по формуле

$$\begin{cases} (\Psi_1 U)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_1(x, t, \Delta t_1)}^t g(P_\tau, u_3(P_\tau))(u_1(P_\tau) + u_2(P_\tau)) d\tau \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\alpha_2(x, t, \Delta t_1)}^t g(P_{\tau_0}, u_3(P_{\tau_0}))(u_1(P_{\tau_0}) + u_2(P_{\tau_0})) d\tau + F_{1, \Delta t_1}(x, t), \\ (\Psi_2 U)(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_3(x, t, \Delta t_1)}^t g(Q_\tau, u_3(Q_\tau))(u_1(Q_\tau) + u_2(Q_\tau)) d\tau + F_{2, \Delta t_1}(x, t), \\ (\Psi_3 U)(x, t) = \int_{\alpha_3(x, t, \Delta t_1)}^t u_1(Q_\tau) d\tau + F_{3, \Delta t_1}(x, t). \end{cases} \quad (4.7)$$

Сначала покажем, что оператор Ψ переводит шар

$$B([T_1, T_2]; R_1) := \{U \in C(\overline{D}_{T_1, T_2}) : \|U\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} \leq R_1\}$$

в себя, где

$$T_1 = T_*, \quad T_2 = T_* + \Delta t_2, \quad \overline{D}_{T_1, T_2} := \overline{D} \cap \{T_1 \leq t \leq T_2\}.$$

Действительно, в силу (3.3), (4.2)–(4.5) и (4.7) имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi_1 U\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} &\leq 2M(R_1)R_1\Delta t_2 + 2M(R_*)R_*\Delta t_1 + \|F_1\|_{C(\overline{D}_T)} \\ &\leq 2^{-1} + 2TM(R_*)R_* + \|F\|_{C(\overline{D}_T)} \leq R_1. \end{aligned}$$

Аналогично $\|\Psi_i U\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} \leq R_1$, $i = 2, 3$, и, тем самым, окончательно получим, что

$$\|\Psi U\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} \leq R_1.$$

Теперь покажем, что оператор Ψ является сжимающим отображением в этом шаре. Действительно, при $(x, t) \in \overline{D}_{T_1, T_2}$ в силу (3.3), (4.4) и (4.7) имеем

$$\begin{aligned} &|(\Psi_1 U^2 - \Psi_1 U^1)(x, t)| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\alpha_1(x, t, \Delta t_1)}^t (|g(P_\tau, u_3^2(P_\tau)) - g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))| |u_1^2(P_\tau) + u_2^2(P_\tau)| \\ &\quad + |g(P_\tau, u_3^1(P_\tau))| |u_1^2(P_\tau) - u_1^1(P_\tau) + u_2^2(P_\tau) - u_2^1(P_\tau)|) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\alpha_1(x, t, \Delta t_1)}^t (|g(P_{\tau_0}, u_3^2(P_{\tau_0})) - g(P_{\tau_0}, u_3^1(P_{\tau_0}))| |u_1^2(P_{\tau_0}) + u_2^2(P_{\tau_0})| \\ &\quad + |g(P_{\tau_0}, u_3^1(P_{\tau_0}))| |u_1^2(P_{\tau_0}) - u_1^1(P_{\tau_0}) + u_2^2(P_{\tau_0}) - u_2^1(P_{\tau_0})|) d\tau \\ &\leq 2c(R_1)R_1\Delta t_2 \|u_3^2 - u_3^1\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} + 2M(R_1)\Delta t_2 \|U^2 - U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_3^2 - u_3^1\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} + \frac{1}{2R_1} \|U^2 - U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2R_1} \right) \|U^2 - U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})} = q_1 \|U^2 - U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})},$$

где $q_1 := (1/2)(1 + 1/R_1) < 1$, так как $R_1 > 1$ в силу (4.5). Аналогично получаем, что

$$|(\Psi_i U^2 - \Psi_i U^1)(x, t)| \leq q_i \|U^2 - U^1\|_{C(\overline{D}_{T_1, T_2})}, \quad 0 < q_i := \text{const} < 1, \quad i = 2, 3.$$

Отсюда, в силу теоремы о сжимающем отображении следует разрешимость системы (4.6) в классе $C(\overline{D}_{T_1, T_2})$.

Продолжая этот процесс шаг за шагом и учитывая, что в силу глобальной априорной оценки (4.3) длина каждого шага Δt_i не зависит от его номера i , мы получим глобальную разрешимость системы (3.5), а, тем самым, и самой задачи (1.1), (1.2) в области D_T для любого $T > 0$.

5. Единственность решения задачи (1.1), (1.2).

ЛЕММА 5.1. Пусть выполнены условия (3.2), (3.3). Тогда для любого $T > 0$ задача (1.1), (1.2) не может иметь более одного сильного обобщенного решения класса C^1 в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим, что задача (1.1), (1.2) имеет два возможных различных сильных обобщенных решения u^1 и u^2 класса C^1 в области D_T . Согласно определению 1.1 существует такая последовательность функций $u_n^i \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^i - u^i\|_{C^1(\overline{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n^i - f\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g(x, t, u_n^i)u_{nt}^i - g(x, t, u^i)u_t^i\|_{C(\overline{D}_T)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.2)$$

Воспользуемся известным обозначением $\square := \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ и положим $\omega_{nm} := u_n^2 - u_m^1$. Легко видеть, что функция $\omega_{nm} \in \dot{C}^2(\overline{D}_T, \Gamma_T)$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$\square \omega_{nm} + g_{nm} = f_{nm}, \quad (5.3)$$

$$\left. \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} \right|_{\gamma_{2,T}} = 0, \quad \omega_{nm}|_{\gamma_{1,T}} = 0, \quad (5.4)$$

где

$$g_{nm} := g(x, t, u_n^2)u_{nt}^2 - g(x, t, u_m^1)u_{mt}^1, \quad f_{nm} := Lu_n^2 - Lu_m^1. \quad (5.5)$$

В силу первого равенства из (5.1) найдется такое число $A := \text{const} > 0$, не зависящее от индексов i и n , что

$$\|u_n^i\|_{C^1(\overline{D}_T)} \leq A. \quad (5.6)$$

Согласно вторым равенствам (5.1) и (5.5) имеем

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_{nm}\|_{C(\overline{D}_T)} = 0. \quad (5.7)$$

В силу (3.2), (3.3), (5.6) и первого равенства (5.5) легко видеть, что

$$\begin{aligned} g_{nm}^2 &= \left(g(x, t, u_n^2) \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} + (g(x, t, u_n^2) - g(x, t, u_m^1)) u_{mt}^1 \right)^2 \\ &\leq 2M^2(A) \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 + 2A^2 c^2(A) \omega_{nm}^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Умножая обе части равенства (5.3) на $\partial \omega_{nm} / \partial t$ и, интегрируя полученное равенство по области D_τ , в силу (5.4), так же, как при получении неравенства (2.11) из (2.5), (2.6), будем иметь

$$w_{nm}(\tau) := \int_{\Omega_\tau} \left[\left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 \right] dx = 2 \int_{D_\tau} (f_{nm} - g_{nm}) \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} dx dt. \quad (5.9)$$

В силу оценки (5.8) и неравенства Коши получаем

$$\begin{aligned} 2 \int_{D_\tau} (f_{nm} - g_{nm}) \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} dx dt &\leq \int_{D_\tau} (f_{nm} - g_{nm})^2 dx dt + \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &\leq 2 \int_{D_\tau} f_{nm}^2 dx dt + 2 \int_{D_\tau} g_{nm}^2 dx dt + \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt \\ &\leq 2 \int_{D_\tau} f_{nm}^2 dx dt + 4A^2 c^2(A) \int_{D_\tau} \omega_{nm}^2 dx dt + (1 + 4M^2(A)) \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Далее, в силу равенства

$$\omega_{nm}(x, t) = \int_x^t \frac{\partial \omega_{nm}(x, \tau)}{\partial t} d\tau, \quad (x, t) \in \overline{D}_T,$$

которое следует из второго равенства (5.4), стандартными рассуждениями вытекает неравенство [25; с. 63]

$$\int_{D_\tau} \omega_{nm}^2 dx dt \leq \tau^2 \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt. \quad (5.11)$$

Из (5.9)–(5.11) следует, что

$$\begin{aligned} w_{nm}(\tau) &\leq (1 + 4M^2(A) + 4\tau^2 A^2 c^2(A)) \int_{D_\tau} \left(\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial t} \right)^2 dx dt + 2 \int_{D_\tau} f_{nm}^2 dx dt \\ &\leq (1 + 4M^2(A) + 4T^2 c^2(A)) \int_0^\tau w_{nm}(\sigma) d\sigma + 2 \int_{D_T} f_{nm}^2 dx dt. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы Гронуолла [24; с. 13] получаем, что

$$w_{nm}(\tau) \leq c_2 \|f_{nm}\|_{L_2(D_T)}^2, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (5.12)$$

где $c_2 := 2 \exp(1 + 4M^2(A) + 4T^2 A^2 c^2(A))T$.

Проводя те же рассуждения, которые привели к оценке (2.13), а также учитывая очевидное неравенство

$$\|f_{nm}\|_{L_2(D_T)}^2 \leq \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}^2 \operatorname{mes} D_T,$$

в силу (5.12) для $(x, t) \in \overline{D_T}$ будем иметь

$$|\omega_{nm}(x, t)|^2 \leq tw_{nm}(t) \leq Tc_2 \operatorname{mes} D_T \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}^2 = \frac{c_2 T^3}{2} \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}^2.$$

Отсюда непосредственно следует

$$\|\omega_{nm}\|_{C(\overline{D_T})} \leq T \sqrt{\frac{c_2 T}{2}} \|f_{nm}\|_{C(\overline{D_T})}. \quad (5.13)$$

Согласно определению функции ω_{nm} и первого равенства легко видеть, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\omega_{nm}\|_{C^1(\overline{D_T})} = \|u^2 - u^1\|_{C^1(\overline{D_T})}$$

и, тем более,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\omega_{nm}\|_{C(\overline{D_T})} = \|u^2 - u^1\|_{C(\overline{D_T})}.$$

Поэтому, переходя в неравенстве (5.13) к пределу при $n, m \rightarrow \infty$, с учетом (5.7) получим $\|u^2 - u^1\|_{C(\overline{D_T})} = 0$, т.е. $u^1 = u^2$. Лемма 5.1 доказана.

6. Случай отсутствия глобального решения задачи (1.1), (1.2). Ниже мы покажем, что нарушение условия (2.1) может стать причиной отсутствия глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в смысле определения 1.2. Действительно, пусть $g(x, t, s) = -|s|^\alpha s$, $s \in \mathbb{R}$, и показатель нелинейности $\alpha > -1$.

ЛЕММА 6.1. Пусть u является сильным обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T в смысле определения 1.1. Тогда справедливо следующее интегральное равенство:

$$\int_{D_T} u \square \varphi \, dx \, dt = \int_{D_T} |u|^\alpha u u_t \varphi \, dx \, dt + \int_{D_T} f \varphi \, dx \, dt \quad (6.1)$$

для любой функции φ такой, что

$$\varphi \in C^2(\overline{D_T}), \quad \varphi|_{t=T} = 0, \quad \varphi_t|_{t=T} = 0, \quad \varphi_x|_{\gamma_{2,T}} = 0. \quad (6.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению сильного обобщенного решения u задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T функция $u \in C^1(\overline{D_T})$ и найдется такая последовательность функций $u_n \in \dot{C}^2(\overline{D_T}, \Gamma_T)$, что справедливы равенства (2.5) и (2.6) для $g = -|s|^\alpha s$.

Положим $f_n := Lu_n$. Умножим обе части равенства $Lu_n = f_n$ на функцию φ и проинтегрируем полученное равенство по области D_T . В результате интегрирования левой части этого равенства по частям с учетом (6.2) и условий (1.2) получим

$$\int_{D_T} u_n \square \varphi \, dx \, dt = \int_{D_T} |u_n|^\alpha u_n u_{nt} \varphi \, dx \, dt + \int_{D_T} f_n \varphi \, dx \, dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, в силу (2.5) и (2.6) получим (6.1). Этим лемма 6.1 доказана.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi^0 := \varphi^0(x, t)$ такую, что

$$\begin{aligned} \varphi^0 \in C^2(\overline{D}_\infty), \quad \varphi^0 + \varphi_t^0 \leq 0, \quad \varphi^0|_{D_{T=1}} > 0, \\ \varphi_x^0|_{\gamma_{2,\infty}} = 0, \quad \varphi^0|_{t \geq 1} = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

и число

$$\kappa_0 := \int_{D_{T=1}} \frac{|\square \varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}} dx dt < +\infty, \quad p' = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}. \quad (6.4)$$

Легко проверить, что в качестве функции φ^0 , удовлетворяющей условиям (6.3) и (6.4) при достаточно больших положительных постоянных n и m , может быть взята функция

$$\varphi^0(x, t) = \begin{cases} x^n(1-t)^m, & (x, t) \in D_{T=1}, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Положим $\varphi_T(x, t) := \varphi^0(x/T, t/T)$, $T > 0$. В силу (6.3) легко видеть, что

$$\begin{aligned} \varphi_T \in C^2(\overline{D}_T), \quad \varphi_T + T \frac{\partial \varphi_T}{\partial t} \leq 0, \quad \varphi_T|_{D_T} > 0, \\ \frac{\partial \varphi_T}{\partial x} \Big|_{\gamma_{2,T}} = 0, \quad \varphi_T|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_T}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

При заданном f рассмотрим функцию

$$\zeta(T) := \int_{D_T} f \varphi_T dx dt, \quad T > 0. \quad (6.6)$$

Имеет место следующая теорема об отсутствии глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $g(x, t, s) = -|s|^\alpha s$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$, $f \in C(\overline{D}_\infty)$ и $f \geq 0$ в области D_∞ . Тогда, если

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \zeta(T) > 0, \quad (6.7)$$

то найдется такое положительное число $T^* := T^*(f)$, что при $T > T^*$ задача (1.1), (1.2) не может иметь сильного обобщенного решения и класса C^1 в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что при условиях этой теоремы существует сильное обобщенное решение u задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T . Тогда в силу леммы 6.1 имеет место равенство (6.1), в котором в силу (6.5) в качестве φ может быть взята функция $\varphi = \varphi_T$, т.е.

$$\int_{D_T} u \square \varphi_T dx dt = \int_{D_T} |u|^\alpha u u_t \varphi_T dx dt + \int_{D_T} f \varphi_T dx dt. \quad (6.8)$$

С учетом (1.2) и (6.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{D_T} |u|^\alpha u u_t \varphi_T dx dt &= \frac{1}{\alpha + 2} \int_{D_T} \varphi_T \frac{\partial}{\partial t} |u|^{\alpha+2} dx dt \\ &= -\frac{1}{\alpha + 2} \int_{D_T} |u|^{\alpha+2} \frac{\partial \varphi_T}{\partial t} dx dt \geq \frac{1}{(\alpha + 2)T} \int_{D_T} |u|^{\alpha+2} \varphi_T dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (6.6) из (6.8) следует, что

$$\frac{1}{pT} \int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq \int_{D_T} u \square \varphi_T dx dt - \zeta(T), \quad p := \alpha + 2 > 1. \quad (6.9)$$

Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{p' \varepsilon^{p'-1}} b^{p'}, \quad a, b \geq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1$$

возьмем $a = |u| \varphi_T^{1/p}$, $b = |\square \varphi_T| / \varphi_T^{1/p}$, то с учетом того, что $p'/p = p' - 1$, мы получим

$$|u \square \varphi_T| = |u| \varphi_T^{1/p} \frac{|\square \varphi_T|}{\varphi_T^{1/p}} \leq \frac{1}{pT} |u|^p \varphi_T + \frac{T^{p'-1}}{p'} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}}.$$

В силу (6.9) и последнего неравенства будем иметь

$$\frac{1-\varepsilon}{p} \int_{D_T} \varphi_T dx dt \leq \frac{1}{p' \varepsilon^{p'-1}} \int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt - \zeta(T),$$

откуда при ε следует

$$\int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq \frac{p}{(1-\varepsilon)p' \varepsilon^{p'-1}} \int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt - \frac{p}{1-\varepsilon} \zeta(T).$$

С учетом того, что $p' = p/(p-1)$, $p = p'/(p-1)$ и

$$\min_{0 < \varepsilon < 1} \frac{p}{(1-\varepsilon)p' \varepsilon^{p'-1}} = p^{p'},$$

где минимум реализуется при $\varepsilon = 1/p$, из последнего неравенства вытекает, что

$$\int_{D_T} |u|^p \varphi_T dx dt \leq p^{p'} \int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt - \frac{p}{1-\varepsilon} \zeta(T). \quad (6.10)$$

Поскольку $\varphi_T(x, t) := \varphi^0(x/T, t/T)$, то в силу (6.3), (6.4), после замены переменных $x = Tx_1$, $t = Tt_1$, легко проверить, что

$$\int_{D_T} \frac{|\square \varphi_T|^{p'}}{\varphi_T^{p'-1}} dx dt = T^{-2(p'-1)} \int_{D_{T=1}} \frac{|\square \varphi^0|^{p'}}{|\varphi^0|^{p'-1}} dx_1 dt_1 = T^{-2(p'-1)} \kappa_0.$$

Отсюда с учетом (6.5) из (6.10) получим

$$0 \leq \frac{\kappa_0}{p' T^{p'-1}} - \zeta(T). \quad (6.11)$$

Поскольку $p' = p/(p-1) > 1$, то $-2(p'-1) < 0$ и в силу (6.4) будем иметь

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\kappa_0}{p' T^{p'-1}} = 0.$$

Поэтому в силу (6.7) найдется такое положительное число $T^* := T^*(f)$, что при $T > T^*$ правая часть неравенства (6.11) будет отрицательной, в то время как левая часть этого неравенства неотрицательна. Отсюда непосредственно следует, что если u – сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) класса C^1 в области D_T , то обязательно $T \leq T^*$, что и доказывает теорему 6.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Легко проверить, что если $f \in C(\overline{D}_\infty)$, $f \geq 0$ и $f(x, t) \geq ct^{-m}$ при $t \geq 1$, где $c = \text{const} > 0$, $0 \leq m = \text{const} \leq 2$, то условие (6.7) будет выполнено и, тем самым, при $g = -|s|^\alpha s$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ задача (1.1), (1.2) при достаточно больших T не будет иметь сильного обобщенного решения и класса C^1 в области D_T .

Действительно, вводя в (6.6) преобразование независимых переменных x и t по формуле $x = Tx_1$, $t = Tt_1$, после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta(T) &= T^2 \int_{D_{T=1}} f(Tx_1, Tt_1) \varphi^0(x_1, t_1) dx_1 dt_1 \\ &\geq cT^{2-m} \int_{D_{T=1} \cap \{t_1 \geq T^{-1}\}} t_1^{-m} \varphi^0(x_1, t_1) dx_1 dt_1 \\ &\quad + T^2 \int_{D_{T=1} \cap \{t_1 < T^{-1}\}} f(Tx_1, Tt_1) \varphi^0(x_1, t_1) dx_1 dt_1 \end{aligned}$$

в предположении, что $T > 1$. Далее, пусть $T_1 > 1$ – произвольное фиксированное число. Тогда из последнего неравенства для функций ζ будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta(T) &\geq cT^{2-m} \int_{D_{T=1} \cap \{t_1 \geq T^{-1}\}} t_1^{-m} \varphi^0(x_1, t_1) dx_1 dt_1 \\ &\geq c \int_{D_{T=1} \cap \{t_1 \geq T_1^{-1}\}} t_1^{-m} \varphi^0(x_1, t_1) dx_1 dt_1, \end{aligned}$$

если $T \geq T_1 > 1$. Из последнего неравенства сразу следует справедливость (6.7).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [2] J.-L. Lions, W. A. Strauss, “Some non linear evolution equations”, *Bull. Soc. Math. France*, **93** (1965), 43–96.
- [3] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981.
- [4] F. John, “Blow-up of solutions of nonlinear wave equation in three space dimensions”, *Manuscripta Math.*, **28**:1-3 (1979), 235–268.
- [5] T. Kato, “Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:4 (1980), 501–505.
- [6] T. C. Sideris, “Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions”, *J. Differential Equations*, **52**:3 (1984), 378–406.
- [7] V. Georgiev, H. Lindblad, C. D. Sogge, “Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations”, *Amer. J. Math.*, **119**:6 (1997), 1291–1319.
- [8] L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Math. Appl. (Berlin), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [9] S. I. Pohozaev, L. Véron, “Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequaties”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **29**:2 (2001), 393–420.
- [10] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [11] G. Todorova, E. Vitillaro, “Blow-up for nonlinear dissipative wave equations in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **303**:1 (2005), 242–257.
- [12] L. Liu, M. Wang, “Global existence and blow-up of solutions for some hyperbolic systems with damping and source terms”, *Nonlinear Anal.*, **64**:1 (2006), 69–91.

- [13] J. Zhu, “Blow-up of solutions of a semilinear hyperbolic equation and a parabolic equation with general forcing term and boundary condition”, *Nonlinear Anal.*, **67**:1 (2007), 33–38.
- [14] S. Kharibegashvili, “On the solvability of one multidimensional version of the first Darboux problem for some nonlinear wave equations”, *Nonlinear Anal.*, **68**:4 (2008), 912–924.
- [15] С. С. Харибегашвили, “О разрешимости характеристической задачи Коши для некоторых нелинейных волновых уравнений в световом конусе будущего”, *Дифференц. уравнения*, **44**:1 (2008), 129–139.
- [16] O. Jokhadze, “On existence and nonexistence of global solutions of Cauchy–Goursat problem for nonlinear wave equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **340**:2 (2008), 1033–1045.
- [17] Г. К. Берикелашвили, О. М. Джохадзе, Б. Г. Мидодашвили, С. С. Харибегашвили, “О существовании и отсутствии глобальных решений первой задачи Дарбу для нелинейных волновых уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **44**:3 (2008), 359–372.
- [18] О. М. Джохадзе, С. С. Харибегашвили, “О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка”, *Матем. заметки*, **84**:5 (2008), 693–712.
- [19] Э. Гурса, *Курс математического анализа*. Т. 3. Ч. 1. Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными, Гостехиздат, М.–Л., 1933.
- [20] Е. И. Моисеев, “О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями”, *Дифференц. уравнения*, **20**:1 (1984), 73–87.
- [21] Е. И. Моисеев, *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [22] А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995.
- [23] S. Kharibegashvili, “Goursat and Darboux type problems for linear hyperbolic partial differential equations and systems”, *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, **4** (1995), 1–127.
- [24] Д. Хенри, *Геометрическая теория полуминейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [25] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [26] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

С. С. Харибегашвили

Тбилисский государственный университет

им. И. Джавахишвили

E-mail: kharibegashvili@yahoo.com

Поступило

28.02.2011

О. М. Джохадзе

Тбилисский государственный университет

им. И. Джавахишвили

E-mail: ojokhadze@yahoo.com