Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Терехин, Системы представления и проекции базисов,
Матем. заметки, 2004, том 75, выпуск 6, 944–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:29:31

СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ПРОЕКЦИИ БАЗИСОВ

П. А. Терёхин

Система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых векторов банахова пространства F называется *системой представления*, если для любого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \quad (1)$$

сходится к f по норме пространства F :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F = 0.$$

Очевидно, что если $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис объемлющего пространства $F' \supset F$ и существует непрерывный проектор $P: F' \rightarrow F$ из F' на F , то после удаления нулевых векторов из системы

$$\varphi_n = P\psi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

получим систему представления в пространстве F . Рассмотрим следующий

ВОПРОС. При выполнении каких условий система представления является проекцией базиса объемлющего банахова пространства?

Этот вопрос восходит к теореме Наймарка [1]: *всякая система Φ ненулевых векторов гильбертова пространства H такая, что для любого вектора $g \in H$ выполняется равенство Парсеваля*

$$\|g\|_H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(g, \varphi_n)|^2 \right)^{1/2},$$

является ортогональной проекцией ортонормированного базиса Ψ объемлющего гильбертова пространства $H' \supset H$. Он возник в связи с недавним результатом Кашина и Куликовой [2]: *всякий фрейм Φ в гильбертовом пространстве H является ортогональной проекцией базиса Рисса Ψ объемлющего гильбертова пространства $H' \supset H$.*

Напомним, что согласно определению, принадлежащему Даффину и Шефферу [3], *фреймом* называется система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых векторов гильбертова пространства H такая, что всякий вектор $g \in H$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_H \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(g, \varphi_n)|^2 \right)^{1/2} \leq B\|g\|_H \quad (3)$$

с некоторыми постоянными $0 < A \leq B < \infty$, не зависящими от f .

Также напомним, что *базис Рисса* можно охарактеризовать как базис гильбертова пространства, для которого справедливо (3).

Пусть X – банахово пространство числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющее следующему условию: *система канонических ортов $\varepsilon_i = \{\varepsilon_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots$, образует базис пространства X* (здесь ε_{ij} – символ Кронекера). Выполнение этого условия позволяет отождествить сопряженное пространство X^* с некоторым изометрически изоморфным ему пространством последовательностей $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, что $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ – общий вид линейного непрерывного функционала в X .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00123, и программы “Ведущие научные школы РФ”, проект НШ-1295.2003.1.

Скажем, что система ненулевых векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует *фрейм* в банаховом пространстве F относительно пространства последовательностей X , если для любого линейного непрерывного функционала $g \in G = F^*$ его коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \|\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^\infty\|_Y \leq B\|g\|_G \quad (4)$$

с некоторыми постоянными $0 < A \leq B < \infty$, не зависящими от g .

Понятно, что неравенства (3) суть частный случай неравенств (4) при $F = G = H$ и $X = Y = l_2$. Таким образом, (классический) фрейм является фреймом в гильбертовом пространстве H относительно l_2 .

Пространством коэффициентов системы представления Φ называется пространство X_Φ числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которых ряд (1) сходится по норме пространства F . Пространство X_Φ полно относительно нормы

$$\|x\|_{X_\Phi} = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k \right\|_F.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система канонических ортов является базисом банахова пространства X_Φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Всякая система представления Φ является фреймом относительно пространства коэффициентов X_Φ^1 .

Пространством коэффициентов нуль-рядов фрейма Φ в банаховом пространстве F относительно пространства последовательностей X называется (замкнутое) подпространство $N = N(X)$ пространства X , состоящее из тех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, для которых ряд (1) сходится к нулевому вектору $0 \in F$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n = 0.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно пространства последовательностей X . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (А) фрейм Φ является проекцией базиса объемлющего пространства, т.е. существует банахово пространство $F' \supset F$ с базисом $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, пространство коэффициентов которого совпадает с X , и непрерывный проектор $P: F' \rightarrow F'$ из F' на F такие, что справедливы проекционные соотношения (2);
- (В) существует система $\Phi^* = \{\varphi_n^*\}_{n=1}^\infty \subset G$ линейных непрерывных функционалов на F такая, что для любого $f \in F$ имеем $\{(f, \varphi_n^*)\}_{n=1}^\infty \in X$ и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n^*) \varphi_n;$$

- (С) пространство коэффициентов нуль-рядов N дополняемо в X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим ассоциированный с фреймом Φ оператор $T: X \rightarrow F$ посредством равенства

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n.$$

Рассмотрим следующие свойства оператора T :

- (А') существует изоморфизм $T': X \rightarrow F'$ пространства X на некоторое банахово пространство $F' \supset F$ такой, что $T = PT'$ для некоторого непрерывного проектора $P: F' \rightarrow F'$ из F' на F ;

¹Верно и обратное, всякий фрейм является системой представления. Однако возможно, что одна и та же система представления образует фрейм с разными пространствами последовательностей.

(B') оператор T имеет правый обратный оператор $S: F \rightarrow X$, т.е. $TS = I_F$ – тождественный оператор в F ;

(C') ядро $\text{Ker}(T)$ оператора T дополняемо в X .

Проверим, что

$$(A) \iff (A'), \quad (B) \iff (B'), \quad (C) \iff (C').$$

(A) $\implies$ (A') Поскольку $X_\Psi = X$, то соответствие $\varepsilon_n \leftrightarrow \psi_n, n = 1, 2, \dots$, продолжается до искомого изоморфизма T' пространств X и F' .

(A') $\implies$ (A) Достаточно положить $\psi_n = T'\varepsilon_n, n = 1, 2, \dots$.

(B) $\implies$ (B') Достаточно положить $Sf = \{(f, \varphi_n^*)\}_{n=1}^\infty$.

(B') $\implies$ (B) Если $x = Sf = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, то $x_n = x_n(f)$ – линейный непрерывный функционал на F . Обозначим его φ_n^* . Тогда

$$f = TSf = Tx = \sum x_n(f)\varphi_n = \sum (f, \varphi_n^*)\varphi_n.$$

(C) $\implies$ (C') Достаточно заметить, что $N = \text{Ker}(T)$.

Теперь покажем, что свойства (A'), (B') и (C') эквивалентны.

(A') $\implies$ (B') Достаточно положить $Sf = (T')^{-1}f$ для $f \in F$.

(B') $\implies$ (C') Имеем $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(S) = \{0\}$, так как если $Tx = 0$ и $x = Sf$, то $f = TSf = 0$ и $x = 0$. Далее, для любого x справедливо разложение $x = (x - STx) + STx$. При этом $x - STx \in \text{Ker}(T)$, поскольку $T(x - STx) = Tx - (TS)(Tx) = 0$. Таким образом, справедливо разложение в прямую сумму $X = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(S)$, так что $\text{Ker}(T)$ дополняемо в X .

(C') $\implies$ (A') Пусть $F' = F \times \text{Ker}(T)$ – декартово произведение банаховых пространств и $P: F' \rightarrow F'$ – естественная проекция F' на множество векторов вида $(f, 0), f \in F$, которое отождествим с F . Пусть, далее, $X = M \oplus N$ – разложение пространства X в прямую сумму подпространств M и N , где $N = \text{Ker}(T)$. Положим $T'x = (Tx_M, x_N)$, где $x = x_M + x_N, x_M \in M$ и $x_N \in N$. Покажем, что $T': X \rightarrow F'$ – изоморфизм. Ясно, что $\text{Ker}(T') = \{0\}$. Проверим, что T' отображает X на F' . В силу определения пространства F' и оператора T' с учетом равенства $Tx = Tx_M$ достаточно установить сюръективность оператора $T: X \rightarrow F$. Как известно (см., например [4, с. 18–20]), оператор T является сюръекцией тогда и только тогда, когда сопряженный оператор T^* является инъекцией: $\|T^*g\|_Y \geq c\|g\|_G, c > 0$. Но последнее неравенство следует из оценки снизу в (4), поскольку $T^*g = \{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Система представления Φ является проекцией базиса обвешивающего пространства тогда и только тогда, когда $N_\Phi = N(X_\Phi)$ дополняемо в X_Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность непосредственно вытекает из теоремы. Докажем необходимость. Пусть X – пространство коэффициентов базиса. Тогда $X \subset X_\Phi$. Согласно (B') существует оператор $S: F \rightarrow X$ такой, что $TS = I_F$. Обозначим через S_0 тот же самый оператор S , рассматриваемый как оператор из F в X_Φ , и T_0 – оператор, ассоциированный с Φ как фреймом в F относительно X_Φ . Ясно, что $T_0x = Tx$ для $x \in X$. Имеем $T_0S_0f = TSf = f$, т.е. $T_0S_0 = I_F$. Поскольку (B') равносильно (C), то N_Φ дополняемо в X_Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Полагая в теореме $X = l_2$, получаем результат Кашина и Куликовой. Далее, для $g \in G' = (F')^*$ будут выполняться неравенства

$$A'\|g\|_{G'} \leq \| \{(g, \psi_n)\}_{n=1}^\infty \|_Y \leq B'\|g\|_{G'},$$

с постоянными A' и B' , зависящими от границ A, B исходного фрейма Φ и от выбора нормы в декартовом произведении $F' = F \times N$. Можно проверить, что при $X = l_2$ и при следующем выборе упомянутой нормы:

$$\|(f, x)\|_{F'} = (\|f\|_F^2 + \|jx\|^2)^{1/2},$$

где $f \in F, x \in N, j: N \rightarrow N$ – некоторый изоморфизм со свойством $A\|x\| \leq \|jx\| \leq B\|x\|$ и норма $\|\cdot\|_F$ индуцирована скалярным произведением, имеем $A' = A$ и $B' = B$ (достаточно воспользоваться определением изоморфизма T' из доказательства теоремы).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 3. С. 277–318. 2. Кашин Б. С., Куликова Т. Ю. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 941–945. 3. Duffin R., Schaeffer A. // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. № 2. P. 341–366. 4. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Поступило
02.09.2003