Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, О сходимости последовательностей
обыкновенных дифференциальных операторов, *Матем. за-
метки*, 2004, том 75, выпуск 6, 941–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:51:18

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. А. Владимиров

В недавней работе [1] было рассмотрено несколько эквивалентных способов определения оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом. В настоящей заметке показывается, как один из предложенных в [1] подходов (аппроксимативный) может быть распространен на широкий класс сингулярных граничных задач произвольного четного порядка.

Все функциональные пространства в настоящей заметке предполагаются комплексными.

1. Зафиксируем произвольное натуральное число n и рассмотрим дифференциальное выражение

$$\ell(y) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (p_k y^{(n-k)})^{(n-k)}. \quad (1)$$

Дифференциальное выражение (1) будем называть *регулярным*, если его коэффициенты p_k удовлетворяют условиям

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad p_k \in C^{n-k}[0, 1], \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \operatorname{Re} p_0(x) > \varepsilon.$$

В этом случае с произвольной функцией $y \in W_2^{2n}[0, 1]$ можно связать набор непрерывных функций

$$\begin{aligned} y^{[j]} &= y^{(j)}, & j &= 0, \dots, n-1, \\ y^{[n+j]} &= \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} (p_k y^{(n-k)})^{(j-k)}, & j &= 0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

(см. [2, глава 5], [3, (7.46)]), называемых *квазипроизводными*.

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор, заданный регулярным дифференциальным выражением (1) и некоторыми граничными условиями ранга $2n$. Граничные условия, задающие оператор, можно записать в виде

$$By^\wedge + Cy^\vee = 0, \quad (2)$$

где B и C – некоторые комплексные матрицы порядка $2n$, а через $y^\wedge$, $y^\vee$ обозначены вектор-столбцы

$$\begin{aligned} y^\wedge &= (y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0), y(1), y'(1), \dots, y^{(n-1)}(1))^T, \\ y^\vee &= (y^{[2n-1]}(0), y^{[2n-2]}(0), \dots, y^{[n]}(0), -y^{[2n-1]}(1), -y^{[2n-2]}(1), \dots, -y^{[n]}(1))^T \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00691 и № 03-01-06426.

(см. [3, добавление]). С граничными условиями (2) можно связать пространство $\mathcal{H}_{B,C}$ вида

$$\mathcal{H}_{B,C} = \{y \in W_2^n[0, 1] \mid y^\wedge \in B^{-1} \operatorname{im} C\},$$

где B^{-1} – символ взятия полного прообраза (вообще говоря, матрица B может быть вырождена). Вместе с пространством $\mathcal{H}_{B,C}$ будет рассматриваться дуальное к нему относительно $L_2[0, 1]$ пространство $\mathcal{H}'_{B,C}$, т.е. пополнение пространства $L_2[0, 1]$ по норме

$$\|y\|_{\mathcal{H}'_{B,C}} = \sup_{\|z\|_{\mathcal{H}_{B,C}}=1} |\langle y, z \rangle_{L_2[0,1]}|.$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть граничные условия (2) удовлетворяют соотношению

$$B^{-1} \operatorname{im} C = \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C. \quad (3)$$

Тогда дифференциальный оператор L в пространстве $L_2[0, 1]$, заданный регулярным дифференциальным выражением (1) и граничными условиями (2), может быть однозначно продолжен по непрерывности до ограниченного оператора $\mathfrak{L}$ из пространства $\mathcal{H}_{B,C}$ в пространство $\mathcal{H}'_{B,C}$.

2. Чтобы описать класс “хороших” сингулярных дифференциальных выражений, введем в рассмотрение пространство $\mathcal{F}_{B,C,k}$ и $\mathcal{M}_{B,C,k}$, где $k = 0, \dots, n$. Именно, через $\mathcal{F}_{B,C,k}$, $k = 0, \dots, n$, будем обозначать пространства вида

$$\mathcal{F}_{B,C,k} = \{y \in W_2^k[0, 1] \mid \exists z \in \mathcal{H}_{B,C} \quad z^{(n-k)} = y\}.$$

Соответственно, через $\mathcal{M}_{B,C,k}$, $k = 0, \dots, n$, будем обозначать пополнения пространств $C^{n-k}[0, 1]$ по мультипликаторным нормам

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{B,C,k}} = \sup_{\substack{\|y\|_{\mathcal{F}_{B,C,k}}=1, \\ \|z\|_{\mathcal{F}_{B,C,k}}=1}} |\langle fy, z \rangle_{L_2[0,1]}|.$$

Легко видеть, что пространство $\mathcal{M}_{B,C,0}$ всегда совпадает с пространством $C[0, 1]$.

В дальнейшем будет предполагаться, что коэффициенты p_k сингулярного дифференциального выражения (1) удовлетворяют условиям

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad p_k \in \mathcal{M}_{B,C,k}, \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \operatorname{Re} p_0(x) > \varepsilon.$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть фиксированы матрицы B и C , удовлетворяющие соотношению (3), а также сингулярное дифференциальное выражение (1). Кроме того, пусть выполнены следующие условия:

1) функции $p_{k,l}$, где $k = 0, \dots, n$ и $l = 1, 2, \dots$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad p_{k,l} &\in C^{n-k}[0, 1], \\ \forall l \in \mathbb{N} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad \operatorname{Re} p_{0,l}(x) &> \varepsilon; \end{aligned}$$

2) матрицы B_l и C_l , где $l = 1, 2, \dots$, удовлетворяют соотношению

$$\forall l \in \mathbb{N} \quad B_l^{-1} \operatorname{im} C_l = \mathbb{C}^{2n} \ominus \ker C_l = B^{-1} \operatorname{im} C;$$

3) при любом $k = 0, 1, \dots, n$ последовательность $\{p_{k,l}\}_{l=1}^\infty$ сходится в пространстве $\mathcal{M}_{B,C,k}$ к функции p_k ;

4) последовательности $\{B_l\}_{l=1}^\infty$ и $\{C_l\}_{l=1}^\infty$ сходятся в пространстве $\mathcal{B}(\mathcal{C}^{2n})$ к матрицам B и C соответственно.

Тогда последовательность $\{\mathcal{L}_l\}_{l=1}^{\infty}$ операторов $\mathcal{L}_l: \mathcal{H}_{B,C} \rightarrow \mathcal{H}'_{B,C}$, заданных регулярными дифференциальными выражениями

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} (p_k, ly^{(n-k)})^{(n-k)}$$

и граничными условиями $B_1 y^{\wedge} + C_1 y^{\vee} = 0$, равномерно сходится к некоторому оператору $\mathcal{L}: \mathcal{H}_{B,C} \rightarrow \mathcal{H}'_{B,C}$.

Теорема 1 позволяет определить оператор $\mathcal{L}: \mathcal{H}_{B,C} \rightarrow \mathcal{H}'_{B,C}$, задаваемый сингулярным дифференциальным выражением (1) и граничными условиями (2), удовлетворяющими соотношению (3), как предел регулярных операторов.

3. Пусть задан сингулярный дифференциальный оператор $\mathcal{L}: \mathcal{H}_{B,C} \rightarrow \mathcal{H}'_{B,C}$. Предположим, что $\mathcal{L}y = f \in L_2[0, 1]$. Тогда связь между функциями y и f может быть описана посредством граничной задачи для системы уравнений первого порядка. В случае $n = 1$ граничные задачи такого рода выписаны в [1], где они используются в качестве одного из определений сингулярного оператора Штурма–Лиувилля. В случае $n = 2$ справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $C = 1$;
- 2) функция $p_1 \in \mathcal{M}_{B,C,1}$ удовлетворяет соотношению

$$\forall y, z \in \mathcal{F}_{B,C,1} \quad \langle p_1 y, z \rangle = - \int_0^1 Q(p_1)(y\bar{z})' dx + \Theta(p_1)y(1)\overline{z(1)},$$

где $Q(p_1) \in L_2[0, 1]$ и $\Theta(p_1) \in \mathbb{C}$;

- 3) функция $p_2 \in \mathcal{M}_{B,C,2}$ удовлетворяет соотношению

$$\forall y, z \in \mathcal{F}_{B,C,2} \quad \langle p_2 y, z \rangle = \int_0^1 Q(p_2)(y\bar{z})'' dx + \sum_{k=1}^2 \Theta_k(p_2)[y\bar{z}]^{(k-1)}(1),$$

где $Q(p_2) \in L_2[0, 1]$ и $\Theta(p_2) \in \mathbb{C}^2$.

Тогда равенство $\mathcal{L}y = f$ имеет место в том и только том случае, когда существует решение

$$Y \in W_2^2[0, 1] \times W_2^1[0, 1] \times W_1^1[0, 1] \times W_1^1[0, 1]$$

граничной задачи

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Q(p_2)/p_0 & Q(p_1)/p_0 & 1/p_0 & 0 \\ Q(p_1)Q(p_2)/p_0 & 2Q(p_2) - Q^2(p_1)/p_0 & -Q(p_1)/p_0 & -1 \\ -Q^2(p_2)/p_0 & Q(p_1)Q(p_2)/p_0 & Q(p_2)/p_0 & 0 \end{pmatrix} Y - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} - \Theta_1(p_2) & B_{34} - \Theta_2(p_2) \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} - \Theta_2(p_2) & B_{44} - \Theta(p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \\ Y_1(1) \\ Y_2(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_4(0) \\ Y_3(0) \\ -Y_4(1) \\ -Y_3(1) \end{pmatrix} = 0,$$

удовлетворяющее равенству $Y_1 = y$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук А. М., Шкаликов А. А. // Тр. ММО. 2003. Т. 64. С. 159–212. 2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 3. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. Мариуполь, 2001.