Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразование Кокстера: теоремы плотности, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 144–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:46:16

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОКСТЕРА: ТЕОРЕМЫ ПЛОТНОСТИ

В. А. Колмыков

Преобразование Кокстера – это суперпозиция операторов, являющихся отражениями (или даже псевдоотражениями) относительно некоторого набора гиперплоскостей.

В п. 1 мы доказываем, что если в комплексном пространстве зафиксировать базис, то множество соответствующих матриц всех преобразований Кокстера всюду плотно во множестве квадратных комплексных матриц.

Если на систему гиперплоскостей наложить ограничение, которое коротко можно охарактеризовать как “ацикличность” (все необходимые определения – в п. 2), то мы приходим к важному (в теории алгебр Ли и в теории представлений колчанов) классу преобразований, состоящему из преобразований Кокстера, ассоциированных с произвольными деревьями.

В п. 3 рассматриваются множества всех деревьев, спектры преобразований Кокстера которых содержат заранее заданные собственные значения с кратностями не меньшими, чем заранее заданные. Мы доказываем, что любое такое множество всюду плотно во множестве всех деревьев.

1. Преобразование Кокстера. Если A – некоторая матрица, то через $A_{(i)}$ обозначим матрицу, получающуюся из A занулением всех элементов, кроме тех, которые стоят в i -м столбце. Положим $R_i(A) = I - A_{(i)}$. По каждой $(n \times n)$ -матрице A с элементами из поля K построим новую матрицу

$$C(A) = R_1(A)R_2(A) \cdots R_n(A).$$

Если в линейном пространстве зафиксирован базис, то линейный оператор, имеющий в этом базисе матрицу¹ $C(A)$, называется *преобразованием Кокстера*.

Через $M(n, K)$ обозначим множество всех $(n \times n)$ -матриц с элементами из поля K . Матрицу из $M(n, K)$ назовем *свертневыврожденной*, если невырождены все ее угловые миноры (т.е. миноры, стоящие на пересечении первых k строк и первых k столбцов). Через $P(n, K)$ обозначим подмножество в $M(n, K)$, состоящее из всех невырожденных матриц, в каждом столбце которых есть только один ненулевой элемент.

Сопоставление $A \mapsto C(A)$ определяет отображение $C: M(nK) \rightarrow M(n, K)$. Нам будет интересно описать образ отображения C . Ясного описания этого множества пока нет, но вот, что удалось доказать.

ТЕОРЕМА. 1) *Множество всех свертневыврожденных $(n \times n)$ -матриц с элементами из поля K содержится в $C(M(n, K))$.*

2) *Множество $C(M(n, K)) \cap P(n, K)$ состоит из всех невырожденных диагональных матриц.*

¹Предполагается правостороннее соглашение: строка координат справа умножается на матрицу оператора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Матрицу, получающуюся из единичной матрицы I заменой i -го столбца столбцом L , обозначим I_i^L . Если (i, i) -й элемент матрицы I_i^L не равен нулю, то эта матрица невырождена, а обратная к ней имеет вид I_i^U . Если $F \in M(n, K)$, то умножение матрицы F слева на I_i^L равносильно прибавлению ко всем строкам матрицы F ее i -й строки, умноженной на некоторое (каждый раз на свое) число.

Если F сверхневырождена, то можно подобрать невырожденную матрицу вида $I_1^{L_1}$ так, что в первом столбце матрицы $I_1^{L_1}F$ первый элемент будет равен единице, а остальные – нулю, при этом матрица $I_1^{L_1}F$ будет сверхневырождена. Затем можно подобрать невырожденную матрицу вида $I_2^{L_2}$ так, что во втором столбце матрицы $I_2^{L_2}I_1^{L_1}F$ второй элемент будет равен единице, а остальные – нулю, при этом матрица $I_2^{L_2}I_1^{L_1}F$ будет сверхневырождена. Продолжая этот процесс, получим $I_n^{L_n} \cdots I_1^{L_1}F = I$. Поэтому $F = I_1^{U_1} \cdots I_n^{U_n}$, т.е. F имеет вид $C(A)$.

2) Если $A, B \in M(n, K)$, то матрица $R_k(A)B$ получается из матрицы B следующим образом. Из i -й строки, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы B вычитается ее k -я строка, умноженная на a_{ik} .

Отсюда следует вот что. Пусть $i_1, \dots, i_s$ попарно различны. Если $k \notin \{i_1, \dots, i_s\}$, то k -й столбец у всех матриц из мультипликативной полугруппы, порожденной матрицами $R_{i_1}(A), \dots, R_{i_s}(A)$, одинаков.

Поэтому, если $i_1, \dots, i_s$ попарно различны, то i_1 -й столбец матрицы $R_{i_1}(A) \cdots R_{i_s}(A)$ такой же, как у матрицы $R_{i_1}(A)$.

Множество всех невырожденных диагональных матриц из $M(n, K)$ обозначим $D(n, K)$. Положим $H_i(A) = R_i(A)R_{i+1}(A) \cdots R_n(A)$. Пусть $1 \leq i < n$. Докажем следующую импликацию: если $H_i(A) \in P(n, K)$, то $R_i(A) \in D(n, K)$ и $H_{i+1}(A) \in P(n, K)$. Пусть

$$R_i(A) \cdots R_n(A) = X \in P(n, K).$$

Рассмотрим матрицу $R_i(A)$. Ее (i, i) -й элемент ненулевой, а ее i -й столбец такой же, как у матрицы X . Значит, в i -м столбце матрицы $R_i(A)$ один элемент ненулевой, а остальные нулевые. Так как эта матрица невырождена, то упомянутый ненулевой элемент стоит на (i, i) -м месте. Поэтому $R_i(A) \in D(n, K)$. Отсюда $H_{i+1}(A) = (R_i(A))^{-1}X \in P(n, K)$.

Пусть $Y \in C(M(n, K)) \cap P(n, K)$. То есть для некоторой матрицы A имеем

$$R_1(A) \cdots R_n(A) = Y \in P(n, K).$$

Множественно применяя доказанную выше импликацию, получаем, что $R_1(A), \dots, R_{n-1}(A) \in D(n, K)$ и $R_n(A) \in P(n, K)$. То есть $R_i(A) \in D(n, K)$ для любого i . Поэтому $Y \in D(n, K)$.

Обратно, пусть $Y \in D(n, K)$. Очевидно, что $Y = C(I - Y) \in C(M(n, K))$.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $C(M(n, \mathbb{C}))$ всюду плотно в $M(n, \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно: множество всех комплексных сверхневырожденных $(n \times n)$ -матриц всюду плотно в $M(n, \mathbb{C})$.

2. Ациклический случай. Пусть T – дерево. Занумеруем его вершины. Определим матрицу A , в которой $a_{ij} = 2$ при $i = j$; $a_{ij} = -1$, если $i \neq j$ и i -я вершина соединена ребром с j -й; $a_{ij} = 0$ в остальных случаях. Преобразованием Кокстера, ассоциированным с деревом T и нумерацией его вершин, называется преобразование пространства строк $x \mapsto xC(A)$. В [1, гл. V, § 6, упр. 3] доказано² утверждение (его усиление см. в [2]), из которого следует, что

$$|\lambda^2 I - C(A)| = \lambda^l |(\lambda - 2 + \lambda^{-1})I + A|$$

(здесь l – число вершин дерева). Поэтому в рассматриваемой ситуации характеристический многочлен преобразования Кокстера не зависит от нумерации вершин дерева. Этот многочлен обозначается $T(\lambda)$ и называется *характеристическим многочленом дерева T* . Множество корней многочлена $T(\lambda)$ обозначается $\text{Срес } T$ и называется *спектром дерева T* .

Множество всех деревьев обозначим $\mathcal{T}$, а объединение их спектров обозначим $\text{Срес } \mathcal{T}$.

²Но следует учесть, что во французском и в русском изданиях имеется опечатка: написано “ $a_{ii} = 1$ ”; следует читать “ $a_{ii} = 2$ ”.

3. Плотные множества деревьев. Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$ – некоторые множества деревьев, $\mathcal{M}_n$ и $\mathcal{G}_n$ – множества всех n -вершинных деревьев из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{G}$. Будем говорить, что $\mathcal{M}$ *всюду плотно* в $\mathcal{G}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{M}_n|}{|\mathcal{G}_n|} = 1.$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{Спекс } \mathcal{T}$, а $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество всех деревьев, содержащих в спектре число λ_1 с кратностью $\geq k_1, \dots$, число λ_n с кратностью $\geq k_n$. Обозначим это множество $\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{k_1, \dots, k_n}$. Следующее утверждение доказано в [3] для $n = 1$, $\lambda_1 = -1$ и $k_1 = 1$.

ТЕОРЕМА. *Множество $\mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{k_1, \dots, k_n}$ всюду плотно в $\mathcal{T}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дерево называется *пунктированным*, если в нем зафиксирована некоторая вершина. Лес – это граф, все компоненты которого деревья. Пусть лес F состоит из s пунктированных деревьев $T_1, \dots, T_s$. Добавим к этому лесу компоненту, состоящую из одной вершины. Соединим ребром добавленную вершину с каждой зафиксированной вершиной (тем самым, добавятся s новых ребер). Полученный лес является деревом. Забудем о фиксировании тех его вершин, которые были ранее зафиксированы. Зафиксируем в нем добавленную вершину. Полученное пунктированное дерево обозначим $[T_1, \dots, T_s]$ и назовем *связкой* леса F .

Для вычисления многочлена дерева существует удобная рекуррентная формула “разрезания по вершине” (формулировку и короткое доказательство см. в [4, § 3]). Для нас сейчас важно лишь то, что, применяя эту формулу к дереву $[T_1, \dots, T_s]$, получаем равенство

$$\begin{aligned} [T_1, \dots, T_s](\lambda) &= [T_1, \dots, T_r](\lambda) T_{r+1}(\lambda) \cdots T_s(\lambda) \\ &\quad + T_1(\lambda) \cdots T_r(\lambda) [T_{r+1}, \dots, T_s](\lambda) - (\lambda + 1) T_1(\lambda) \cdots T_s(\lambda). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_i \in \text{Спекс } L_i$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим лес L , состоящий из $s = 2k_1 + \dots + 2k_n$ компонент, среди которых $2k_1$ компонент, изоморфных L_1 , другие $2k_2$ компонент изоморфны L_2 , и т.д. Пунктируем некоторым образом каждую компоненту. Связку полученного леса обозначим L_0 . Возьмем любое $i \in \{1, \dots, n\}$. Перенумеруем компоненты леса L так, что первые k_i компонент изоморфны L_i . Применим к L_0 формулу “разрезания”, взяв $r = k_i$. Получим, что $L_0(\lambda)$ кратен $(L_i(\lambda))^{k_i}$. Отсюда $L_0 \in \mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{k_1, \dots, k_n}$.

Если H и T – пунктированные деревья, то $H \oplus T$ означает непунктированное дерево, получающееся из H и T отождествлением зафиксированных вершин и забыванием фиксирования.

Пусть H – произвольное пунктированное дерево. Применяя формулу “разрезания” к $H \oplus L_0$, получаем, что $H \oplus L_0 \in \mathcal{T}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{k_1, \dots, k_n}$.

В [5] доказано, что для любого пунктированного дерева G множество деревьев вида $X \oplus G$ всюду плотно в $\mathcal{T}$.

Автор благодарит Д. А. Лейтеса и Н. Н. Удоденко за полезную информацию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.
- Колмыков В. А. // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 3. С. 472–473.
- Колмыков В. А. // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 51–56.
- Колмыков В. А. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 37–50.
- Schwenk A. J. // New Directions in the Theory of Graphs. Proc. 3rd Ann Arbor Conf. (Univ. Michigan 1971) / ed. F. Harary. New York: Academic Press, 1973. P. 275–307.