Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Комбаров, О нормальных функторах степени ≥ 3 ,
Матем. заметки, 2004, том 76, выпуск 1, 147–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:26:55

О НОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРАХ СТЕПЕНИ ≥ 3

А. П. Комбаров

Ковариантный функтор $\mathcal{F}: \text{Comr} \rightarrow \text{Comr}$, действующий в категории Comr бикомпактов и их непрерывных отображений, называется *нормальным* в смысле Е. В. Щепина [1], если $\mathcal{F}$ обладает следующими свойствами: функтор $\mathcal{F}$ непрерывен, т.е. $\mathcal{F}$ перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра; функтор $\mathcal{F}$ сохраняет вес; функтор $\mathcal{F}$ мономорфен, т.е. сохраняет инъективность отображений; функтор $\mathcal{F}$ эпиморфен, т.е. сохраняет сюръективность отображений; функтор $\mathcal{F}$ сохраняет пересечения, прообразы, точку и пустое множество. Пусть X – некоторый бикомпакт, $\mathcal{F}$ – некоторый нормальный функтор и $x \in \mathcal{F}(X)$. *Степенью точки x* называется наименьшее натуральное число n такое, что x принадлежит образу $\mathcal{F}(f)$ для некоторого отображения $f: K \rightarrow X$ n -точечного пространства K . Если такое конечное число n не существует, то степень точки x считается бесконечной. *Степенью функтора $\mathcal{F}$* называется максимум степеней всевозможных точек $x \in \mathcal{F}(X)$ для всевозможных бикомпактов X [1]. Для нормального функтора $\mathcal{F}$ и произвольной точки $a \in \mathcal{F}(X)$ определен *носитель* $\text{supp}(a)$ следующим образом: $\text{supp}(a) = \bigcap \{Y \subseteq X : a \in \mathcal{F}(Y)\}$ [1], [2]. Для любого натурального n определяется подфунктор $\mathcal{F}_n$ функтора $\mathcal{F}$ формулой $\mathcal{F}_n(X) = \{a \in \mathcal{F}(X) : |\text{supp}(a)| \leq n\}$ [3]. При этом $\mathcal{F}_1(X)$ гомеоморфно X , и поэтому можно считать, что бикомпакт X лежит в $\mathcal{F}(X)$. Прочие обозначения и терминология, не разъясняемые ниже, такие же, как в [2], [4]. Все пространства предполагаются регулярными.

В 1948 году Катетов [5] доказал, что из наследственной нормальности куба бикомпакта следует его метризуемость. В 1971 году Зенор [6] заменил в теореме Катетова наследственную нормальность куба бикомпакта на наследственную счетную паракомпактность. Операция возведения в куб бикомпакта $X: (X \rightarrow X^3; (f: X \rightarrow Y) \rightarrow (f^3: X^3 \rightarrow Y^3))$, является нормальным функтором, степень которого равна 3, поэтому следующая теорема Федорчука [7] является обобщением теоремы Катетова о кубе: *если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 бикомпакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормален, то X – метризуемый бикомпакт*. Журавев [8] по аналогии с теоремой Зенора о кубе заменил в теореме Федорчука наследственную нормальность бикомпакта $\mathcal{F}(X)$ на наследственную счетную паракомпактность $\mathcal{F}(X)$ и заметил, что требование наследственной нормальности $\mathcal{F}(X)$ в теореме Федорчука можно ослабить до требования наследственной нормальности $\mathcal{F}(X) \setminus X$. Следующая теорема 1 содержится в [9] и является одновременным обобщением теорем Федорчука и Жураева. Напомним определения из работы [10]. Пусть $\mathcal{U}$ – некоторый класс топологических пространств. Будем говорить, что пространство X является $\mathcal{U}$ -нормальным, если в нем любые два непересекающихся замкнутых множества, одно из которых принадлежит классу $\mathcal{U}$, содержатся в непересекающихся окрестностях. Очевидно, все нормальные пространства $\mathcal{U}$ -нормальны для любого класса $\mathcal{U}$. В теореме 1 класс $\mathcal{K}$ – это класс пространств, представимых в виде объединения счетного числа бикомпактных подпространств (класс σ -бикомпактных пространств). Заметим, что регулярное счетно паракомпактное пространство $\mathcal{K}$ -нормально.

ТЕОРЕМА 1. *Если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 бикомпакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно $\mathcal{K}$ -нормален, то X – метризуемый бикомпакт.*

Основным результатом настоящей заметки является теорема 2, усиливающая теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. *Если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 3 пространство $\mathcal{F}(X) \setminus X$ наследственно $\mathcal{K}$ -нормально, то X – метризуемый бикомпакт.*

Пусть теперь $\mathcal{Q}$ – некоторый класс топологических пространств. Класс $\mathcal{U}$ будем называть $\mathcal{Q}$ -стабильным, если для каждого $X \in \mathcal{U}$ и $Y \in \mathcal{Q}$ произведение $X \times Y$ принадлежит $\mathcal{U}$. Пусть $\mathcal{S}$ – класс всех счетных пространств. Класс $\mathcal{K}$ является $\mathcal{S}$ -стабильным, поэтому, полагая $\mathcal{U} = \mathcal{K}$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00706.

и $\mathcal{Q} = \mathcal{S}$ в теореме 3 из [10], получаем следующую лемму 1, необходимую для доказательства теоремы 2.

ЛЕММА 1. Пусть Y – счетно компактное бесконечное пространство и произведение $X \times Y$ наследственно $\mathcal{H}$ -нормально. Тогда всякое σ -бикомпактное замкнутое подмножество в X является регулярным G_δ -множеством.

Напомним, что подмножество G топологического пространства называется *регулярным G_δ -множеством*, если оно является пересечением счетного числа замкнутых множеств, внутренности которых содержат G .

Следующая лемма 2 доказана в [7].

ЛЕММА 2. Пусть X – бикомпакт такой, что для некоторого нормального функтора $\mathcal{F}$ степени ≥ 2 бикомпакт $\mathcal{F}(X)$ совершенно нормален. Тогда бикомпакт X метризуем.

Для бесконечного кардинального числа τ через αN_τ , как и в [7], обозначается александровская компактификация дискретного множества N_τ мощности τ . Пусть $\alpha N_\tau = N_\tau \cup \{\tau\}$. Александровская компактификация множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначается через $\alpha\mathbb{N}$. Очевидно, $\alpha\mathbb{N} = \{n : n < \omega\} \cup \{\omega\}$ – это сходящаяся последовательность с пределом ω . Рассматривается пространство $\text{exp}(X)$ всех (непустых) замкнутых подмножеств пространства X в топологии Вьеториса. Хорошо известно, что exp является нормальным функтором в категории Comp с естественно определяемыми подфункторами $\text{exp}_k(X) = \{F \in \text{exp}(X) : |F| \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3. Пространство $\text{exp}_2(\alpha N_\tau) \setminus \alpha N_\tau$ содержит $((\alpha N_\tau) \times (\alpha\mathbb{N})) \setminus \{(\tau, \omega)\}$ для любого бесконечного кардинального числа τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя естественное вложение $\alpha N_\tau = N_\tau \cup \{\tau\}$ в $\alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N}) = (N_\tau \oplus \mathbb{N}) \cup \{\tau\}$ (здесь $\alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N})$ – александровская компактификация дискретного множества $N_\tau \oplus \mathbb{N}$), определяем гомеоморфизм ξ произведения $(\alpha N_\tau) \times (\alpha\mathbb{N})$ в $\text{exp}_2(\alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N}))$ формулами $\xi(x, n) = \{x, n\}$ и $\xi(x, \omega) = \{x, \tau\}$, где $x \in \alpha N_\tau$ и $n < \omega$. Заметим, что только одна точка произведения попадает в $\text{exp}_1(\alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N}))$, а именно, $\xi(\tau, \omega) = \{\tau\}$. Поэтому ξ гомеоморфно отображает $((\alpha N_\tau) \times (\alpha\mathbb{N})) \setminus \{(\tau, \omega)\}$ в $\text{exp}_2(\alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N})) \setminus \alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N})$. Но дискретное пространство $N_\tau \oplus \mathbb{N}$ гомеоморфно пространству N_τ , поэтому и $\text{exp}_2(\alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N})) \setminus \alpha(N_\tau \oplus \mathbb{N})$ гомеоморфно $\text{exp}_2(\alpha N_\tau) \setminus \alpha N_\tau$. Композиция гомеоморфизма ξ и этого гомеоморфизма дает искомое вложение $((\alpha N_\tau) \times (\alpha\mathbb{N})) \setminus \{(\tau, \omega)\}$ в $\text{exp}_2(\alpha N_\tau) \setminus \alpha N_\tau$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Если кардинальное число τ несчетно, то пространство $((\alpha N_\tau) \times (\alpha\mathbb{N})) \setminus \{(\tau, \omega)\}$ не является $\mathcal{H}$ -нормальным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $A = \{(x, \omega) : x \in N_\tau\}$ и $B = \{(\tau, n) : n \in \mathbb{N}\}$ являются замкнутыми непересекающимися подмножествами пространства $((\alpha N_\tau) \times (\alpha\mathbb{N})) \setminus \{(\tau, \omega)\}$, причем множество B принадлежит классу $\mathcal{H}$. Нетрудно заметить, что множества A и B не разделяются открытыми окрестностями (см., например, [11, лемма 3.6]).

Следующая лемма 5 является усилением предложения 1 из [7] и непосредственно следует из леммы 3 и леммы 4.

ЛЕММА 5. Если кардинальное число τ несчетно, то $\text{exp}_2(\alpha N_\tau) \setminus \alpha N_\tau$ не является наследственно $\mathcal{H}$ -нормальным пространством.

ЛЕММА 6. Если X – бикомпакт и пространство $\text{exp}_3(X) \setminus X$ наследственно $\mathcal{H}$ -нормально, то X – метризуемый бикомпакт.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все точки бикомпакта X изолированы, то утверждение леммы очевидно, выполняется. Если X содержит только одну изолированную точку, то утверждение леммы 6 следует из леммы 5. Если X содержит две различных неизолированных точки x_1 и x_2 , выберем открытые множества U_1 и U_2 , V_1 и V_2 так, чтобы $x_1 \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1$, $x_2 \in V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Пусть $F_1 = X \setminus U_1$ и $F_2 = X \setminus U_2$. Очевидно, $\bar{V}_1 \times \text{exp}_2(F_1)$ гомеоморфно подпространству $\text{exp}_3(X) \setminus X$, поскольку $\bar{V}_1 \cap F_1 = \emptyset$. Из леммы 1 следует, что всякое замкнутое подмножество $\text{exp}_2(F_1)$ является регулярным G_δ -множеством. Поэтому по лемме 2 бикомпакт F_1 метризуем так же, как и бикомпакт F_2 . Поскольку $X = F_1 \cup F_2$, пространство X также является бикомпактом, метризуемость которого теперь следует из [4, 3.1.20]. Лемма 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Наследственно $\mathcal{H}$ -нормальное пространство $\mathcal{F}(X) \setminus X$ содержит подпространство $\mathcal{F}_a(X) \setminus X = (\pi_{\mathcal{F}, X, 3}(X^3 \times \{a\})) \setminus X$. Здесь $a \in \mathcal{F}(3)$ – некоторый элемент степени 3, а отображение $\pi_{\mathcal{F}, X, 3}: X^3 \times \mathcal{F}(3) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ определено В. Н. Басмановым в [12] формулой $\pi_{\mathcal{F}, X, 3}(\xi, r) = \mathcal{F}(\xi)(r)$, $\xi \in X^3$, $r \in \mathcal{F}(3)$. Следуя В. В. Федорчуку [7], рассмотрим отображение $\pi_3: X^3 \times \{a\} \rightarrow \exp_3(X)$, определенное равенством $\pi_3(\xi, a) = \xi(3)$ (точка $\xi \in X^3$ отождествляется с отображением трехточечного дискретного пространства в X). В [7] доказано, что $\pi_3 = \text{supp} \circ \pi_{\mathcal{F}, X, 3}$, где supp – носитель, осуществляющий естественное преобразование функтора в экспоненту [1], [2]. Отображение $\text{supp}: \mathcal{F}_a(X) \rightarrow \exp_3(X)$ непрерывно и является эпиморфизмом (см. [7, лемма 3]). Легко проверяется, что $(\text{supp})^{-1}(\exp_3(X) \setminus X) = \mathcal{F}_a(X) \setminus X$, поэтому ограничение отображения supp на подпространство $\mathcal{F}_a(X) \setminus X$ является совершенным отображением. Но пространство $\mathcal{F}_a(X) \setminus X$ является подпространством наследственно $\mathcal{H}$ -нормального пространства $\mathcal{F}(X) \setminus X$, поэтому наследственно $\mathcal{H}$ -нормально. Совершенный образ пространства $\mathcal{F}_a(X) \setminus X$ также является наследственно $\mathcal{H}$ -нормальным пространством. Следовательно, пространство $\exp_3(X) \setminus X$ наследственно $\mathcal{H}$ -нормально. Применение леммы 6 завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шепин Е. В. // УМН. 1981. Т. 36. С. 3–62.
2. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. М.: Изд-во МГУ, 1988.
3. Fedorchuk V., Todorčević S. // Topology Appl. 1997. V. 76. P. 125–150.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. Katětov M. // Fund. Math. 1948. V. 35. P. 271–274.
6. Zenor P. // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30. P. 199–201.
7. Федорчук В. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1989. № 4. С. 93–96.
8. Жураев Т. Ф. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2000. № 4. С. 8–11.
9. Kombarov A. P. // International Conference on Functional Analysis and its Applications (Dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach). Abstracts, 2002. P. 109.
10. Kombarov A. P. // Topology Appl. 2000. V. 107. P. 117–122.
11. Kombarov A. P. // Topology Appl. 1996. V. 69. P. 283–292.
12. Басманов В. Н. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 6. С. 40–42.