Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Коняев, Асимптотическое разложение определителя возмущенной матрицы, *Матем. заметки*, 2004, том 76, вы-

пуск 1, 149–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:43:36

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ МАТРИЦЫ

Ю. А. Коняев

Изложен достаточно простой и конструктивный метод асимптотического разложения возмущенной матрицы, что дополняет известные ранее результаты классической теории возмущений [1]–[3].

Предложенный алгоритм является развитием идей работы [4]. Рассмотрим определитель возмущенной квадратной $n \times n$ матрицы

$$A(\varepsilon) = \sum_0^{\infty} A_k \varepsilon^k, \quad |\varepsilon| < 1,$$

считая известными собственные значения $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ и собственные векторы $\{s_{0j}\}_1^n$ невозмущенной ($\varepsilon = 0$) матрицы A_0 , при этом $\det A_0 = \prod_1^n \lambda_{0j} = D_0$.

При известном разложении спектра

$$\lambda_j(\varepsilon) = \sum_0^{\infty} \lambda_{kj} \varepsilon^k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

возмущенной матрицы $A(\varepsilon)$ решение поставленной задачи может быть представлено в виде

$$\det A(\varepsilon) = \prod_1^n \lambda_j(\varepsilon) = \sum_0^\infty D_k \varepsilon^k. \quad (2)$$

Как известно [1], [2], [4], построение разложений (1) является далеко не тривиальной задачей и его структура заметно усложняется при возмущении матрицы A_0 произвольной жордановой структуры, что в общем случае может привести к разложению точек спектра $\lambda_j(\varepsilon)$ по некоторым дробным степеням малого параметра.

В работе [4] изложен, отличный от ранее известного [1], [2], конструктивный метод одновременного построения всех собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$ и собственных векторов $s_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, n$, с учетом структуры предельной ($\varepsilon = 0$) матрицы A_0 .

В данной заметке (в развитие идей работы [4]) предложен простой алгоритм решения поставленной задачи (2) для случая предельной матрицы A_0 произвольной жордановой структуры (при наличии не более, чем одного нулевого собственного значения), позволяющий записать асимптотическое представление (2) по целым степеням малого параметра ε независимо от кратности ненулевых точек спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы A_0 .

Если $J_0 = S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 + W$; $\Lambda_0 = \text{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0n}\}$, $\det S_0 \neq 0$ (где W – некоторая нильпотентная матрица с достаточно малой нормой $\|W\| < 1$), то при сделанных предположениях всегда можно подобрать невырожденную матрицу R_0 такую, что $P_0 = R_0 J_0$ будет иметь только простые (некратные) собственные значения, допуская ее приведение после невырожденного преобразования U_0 к диагональной матрице $N_0 = U_0^{-1} P_0 U_0 = \text{diag}\{\nu_{01}, \dots, \nu_{0n}\}$, что позволяет воспользоваться теоремой 1 работы [4].

Действительно, введя для произвольной квадратной матрицы A обозначения

$$A = \{a_{jk}\}_1^n, \quad \overline{A} = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}, \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A},$$

рассмотрим следующие матрицы:

$$B(\varepsilon) = S_0^{-1} A(\varepsilon) S_0 = J_0 + \sum_1^\infty B_k \varepsilon^k, \quad P(\varepsilon) = U_0^{-1} R_0 B(\varepsilon) U_0 = N_0 + \sum_1^\infty P_k \varepsilon^k,$$

для которых имеет место соотношение $\det P(\varepsilon) = \det R_0 \det A(\varepsilon)$; тогда решение задачи (2) определяется спектром $\nu_j(\varepsilon)$ матрицы $P(\varepsilon)$ и сводится (с учетом результатов работы [4]) к решению матричного уравнения

$$P(\varepsilon)H(\varepsilon) = H(\varepsilon)N(\varepsilon), \quad (3)$$

которое имеет единственное решение

$$H(\varepsilon) = E + \sum_1^\infty \overline{\overline{H}}_k \varepsilon^k, \quad N(\varepsilon) = \sum_0^\infty N_k \varepsilon^k = \text{diag}\{\nu_1(\varepsilon), \dots, \nu_n(\varepsilon)\}$$

в классе диагональных $N_k = \text{diag}\{\nu_{k1}, \dots, \nu_{kn}\}$, $k \geq 0$, и бездиагональных $\overline{\overline{H}}_k$ матриц.

Приравнявая в уравнении (3) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим простые алгебраические уравнения

$$N_0 \overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k N_0 = N_k - F_k, \quad k \geq 1,$$

где $F_1 = P_1$,

$$F_k = P_k + \sum_{j=1}^{k-1} (P_j \overline{\overline{H}}_{k-j} - \overline{\overline{H}}_{k-j} N_j) = \{f_{jg}\}_k. \quad (4)$$

Из соотношения (4) последовательно и однозначно определяются все диагональные N_k и бездиагональные матрицы $\overline{\overline{H}}_k$, $k \geq 1$, при этом

$$N_k = \overline{F}_k, \quad \overline{\overline{H}}_k = \{h_{jq}\}_k, \quad (h_{jq})_k = (\lambda_{0j} - \lambda_{0q})^{-1} (f_{jq})_k, \quad j \neq q, \quad j, q = 1, \dots, n, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, имеет место утверждение.

ТЕОРЕМА. При наличии у невозмущенной матрицы A_0 с произвольной жордановой структурой не более одного нулевого собственного значения имеет место асимптотическое разложение определителя возмущенной матрицы $A(\varepsilon)$:

$$\det A(\varepsilon) = \det^{-1} R_0 \det P(\varepsilon) = \det^{-1} R_0 \prod_{j=1}^n \nu_j(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \varepsilon^k,$$

определяемое по указанному выше алгоритму.

Случай, когда матрица A_0 эквивалентна матрице, содержащей жорданову клетку с нулевым кратным собственным значением:

$$J_0 = S_0^{-1} A_0 S_0 = \text{diag}\{J_{01}, W_{02}\},$$

где

$$J_{01} = \Lambda_{01} + W_{01}, \quad \Lambda_{01} = \text{diag}\{\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0q}\}, \quad 1 \leq q < n,$$

W_{01}, W_{02} – некоторые нильпотентные матрицы, может быть исследован методами работы [4] с помощью обобщенного срезающего образования, приводящему, вообще говоря, к разложению $\det A(\varepsilon)$ (2) по некоторым дробным степеням малого параметра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
3. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
4. Коняев Ю. А. // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 133–144.