Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, К задаче об асимптотике функции разбиения, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 151–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:09:35

К ЗАДАЧЕ ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИИ РАЗБИЕНИЯ

В. Ю. Протасов

Для произвольного целого $d \geq 2$ бинарная функция разбиения $b(k) = b(d, k)$ определена на множестве неотрицательных целых чисел k и равна количеству всевозможных двоичных разложений

$$k = \sum_{j=0}^{\infty} d_j 2^j,$$

в которых “цифры” d_j принимают значения $0, \dots, d-1$. При $d = \infty$ функция $b(\infty, k)$ равна числу двоичных разложений, в которых цифры принимают произвольные неотрицательные целые значения. Л. Эйлер в работе [1] изучал функцию $b(\infty, k)$ в связи с вопросом о сходимости определенных степенных рядов. Асимптотика функции $b(\infty, k)$ при $k \rightarrow \infty$ исследовалась в работах К. Малера, Н. де Брюйна, Д. Кнута, Б. Резника и др. (см. работу [2] и ссылки в ней). Первые результаты для конечных d были получены Тантурри в 1918 году (см. работу [3] и две ссылки в ней). При $d = 2$, очевидно, $b(k) \equiv 1$; при $d \geq 3$ двоичное разложение уже не единственно, и возникает естественная задача об асимптотическом поведении величины $b(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Резник в [2] доказал, что в случае $d = 2^{r+1}$ ($r \geq 0$ – целое число), имеем $b(k) = C_r k^r + o(k^r)$ при $k \rightarrow \infty$. Здесь C_r – эффективная константа. В той же работе указывалось, что результат этот, вероятно, может быть также выведен из результатов А. Тантурри. Для остальных четных чисел $d = 2n$, как показано в [2], имеем

$$C_n^1 k^{\log_2 n} \leq b(k) \leq C_n^2 k^{\log_2 n},$$

где C_n^1, C_n^2 – положительные константы. Введем обозначения

$$\nu_1 = \liminf_{k \rightarrow \infty} k^{-\log_2 n} b(k), \quad \nu_2 = \limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-\log_2 n} b(k).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00248 и № 03-01-06300, и программы “Научные школы”, грант № 304.2003.1.

Для любого n показатели ν_1 и ν_2 конечны и положительны. Если n является степенью двойки, то $\nu_1 = \nu_2$. Таким образом, в этом случае $b(k) \sim ck^{\log_2 n}$ при $k \rightarrow \infty$. Для других n это может не выполняться. Резник в [2], ссылаясь также на раннюю работу Л. Карлитца [4], показал, что при $d = 6$, $n = 3$ имеем $\nu_1 \neq \nu_2$. Вопрос об остальных n был сформулирован в качестве открытой проблемы. Верно ли, что $\nu_1 = \nu_2$ только для степеней двойки? Ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если $\nu_1 = \nu_2$, то $n = 2^r$ для некоторого целого $r \geq 0$.*

В доказательстве теоремы мы выразим показатели ν_1, ν_2 через специальную непрерывную функцию и покажем, как их вычислять для любого n (предложение 2 и замечание 1).

Для нечетных d функция $b(k)$ ведет себя на бесконечности более сложно; ее асимптотика изучалась в работах [2] и [5]. Обозначим

$$p_1 = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log b(k)}{\log k}, \quad p_2 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log b(k)}{\log k}.$$

При четных d мы всегда имеем $p_1 = p_2$, при нечетных d не всегда. Уже при $d = 3$ оказывается $p_1 < p_2$. Резник в [2] вычислил явно показатели p_1, p_2 для $d = 3$. В работе [5] они были вычислены для $d = 5, 7, 9, 11$ и 13 . Во всех случаях оказалось $p_1 < p_2$. Верно ли это для всех нечетных d ? Эта проблема также была сформулирована в работе [2]. В ней было доказано, что $p_1 \leq \log_2(d/2) \leq p_2$, и, более того,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^{-\log_2(d/2)} b(k) = \infty.$$

В работе [5] для показателей роста были получены формулы: $p_1 = \log_2 \check{\rho}$ и $p_2 = \log_2 \hat{\rho}$, где

$$\check{\rho} = \lim_{s \rightarrow \infty} \min_{d_1, \dots, d_s \in \{0, 1\}} \|T_{d_1} \cdots T_{d_s}\|^{1/s}$$

и

$$\hat{\rho} = \lim_{s \rightarrow \infty} \max_{d_1, \dots, d_s \in \{0, 1\}} \|T_{d_1} \cdots T_{d_s}\|^{1/s}$$

— соответственно нижний спектральный радиус и совместный спектральный радиус линейных операторов T_0, T_1 . Эти операторы действуют в $\mathbb{R}^{d-1}$ и определяются своими $(d-1) \times (d-1)$ -матрицами следующим образом: $(T_r)_{ij} = 1$ при $1-r \leq 2j-i \leq d-r$ и $(T_r)_{ij} = 0$ иначе ($r = 0, 1$). В работе [5] была сформулирована следующая гипотеза (до сих пор не доказанная и не опровергнутая).

ГИПОТЕЗА 1. *Если d нечетно, то*

$$\check{\rho} = \min\{\rho(T_0), \sqrt{\rho(T_0 T_1)}\} \quad \text{и} \quad \hat{\rho} = \max\{\rho(T_0), \sqrt{\rho(T_0 T_1)}\},$$

где ρ обозначает спектральный радиус оператора, т.е. наибольший из модулей его собственных значений.

В [5] это утверждение было доказано для $d = 3, 5, \dots, 13$, что позволило явно вычислить показатели роста p_1, p_2 для этих значений d . Заметим, однако, что ни один из перечисленных выше результатов (даже если считать гипотезу 1 верной) не доказывает неравенства $p_1 < p_2$. В данной работе мы решим эту задачу и установим более сильное неравенство.

ТЕОРЕМА 2. *Для всех нечетных d имеем $p_1 < \log_2(d/2) < p_2$.*

Доказательство теорем 1 и 2 начнем с одного вспомогательного рассуждения. Положим $b(k) = 0$ для всех $k < 0$. Легко проверить, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$$b(2k) = \sum_{j=0}^{n-1} b(k-j), \quad b(2k+1) = \sum_{j=0}^{n-1} b(k-j). \quad (1)$$

Пусть $c_k = 2/d = 1/n$, $k = 0, \dots, 2n-1$, и $c_k = 0$ для остальных k . Рассмотрим, так называемый, *уточняющий оператор* Γ , определенный на пространстве ограниченных последовательностей ℓ_∞ формулой

$$(\Gamma g)_k = \sum_i c_{k-2i} g_i,$$

где $g = (g_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ell_\infty$. Возьмем такую начальную последовательность: $g_0 = 1$, $g_i = 0$, $i \neq 0$. Тогда для каждого $j \geq 0$ имеем

$$(\Gamma^j g)_k = \left(\frac{2}{d}\right)^j b(k) \quad \text{при всех } k \leq 2^j - 1. \quad (2)$$

Это легко доказывается по индукции с использованием соотношения (1). Теперь мы воспользуемся некоторыми фактами из теории уточняющих схем (см., например, [6]). Схема с положительными коэффициентами при условии

$$\sum_k c_{2k} = \sum_k c_{2k+1} = 1$$

сходится. Это означает, что $\|\varphi(2^{-j} \cdot) - \Gamma^j g\|_\infty \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, где $\|\cdot\|_\infty$ – норма пространства ℓ_∞ , φ – единственное непрерывное решение *масштабирующего уравнения*

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{d-1} c_k \varphi(x-k) \quad (3)$$

такое, что $\int \varphi dt = 1$ (в нашем случае $c_k = 1/n$ для всех k). При этом $\text{supp } \varphi \subset [0, d-1]$ (см. [6]). Итак,

$$\delta_j = \max_{k \leq 2^j - 1} |n^{-j} b(k) - \varphi(2^{-j} k)| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Положив $\psi(x) = x^{-\log_2 n} \varphi(x)$, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любых $j \geq 0$ и $k \leq 2^j - 1$ имеем

$$|k^{-\log_2 n} b(k) - \psi(2^{-j} k)| \leq (2^{-j} k) \delta_j, \quad (4)$$

где $\delta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [2] был объявлен (без доказательства) следующий результат: при $d = 6$, $n = 3$ существует непрерывная функция ψ , обладающая свойством (4). Мы видим, что при каждом n такая функция действительно существует, это $\psi(x) = x^{-\log_2 n} \varphi(x)$, где φ – непрерывное решение уравнения (3) при $c_k = 2/d$. Напомним, что значения $\varphi(x)$ явно вычисляются при любом двоично рациональном $x = k/2^j$ (см. [7]). Следовательно, предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (2^j x)^{-\log_2 n} b(2^j x)$$

также явно вычисляется. В самом деле, положив $x = 2^{-j} k$ в (4), получаем, что этот предел равен $\psi(x)$. Для скорости сходимости уточняющей схемы имеем

$$\delta_j \leq \|\varphi(2^{-j} \cdot) - \Gamma^j g\|_\infty \leq \left(\frac{d-1}{d}\right)^j$$

(см. [6]), что позволяет оценить скорость сходимости данного предела.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $d \geq 2$ четно и $b(k) = b(d, k)$ – соответствующая функция разбиения. Тогда для каждого целого $s \geq 1$ имеем

$$\nu_1 = \min_{x \in [2^{-s}, 2^{1-s}]} \psi(x), \quad \nu_2 = \max_{x \in [2^{-s}, 2^{1-s}]} \psi(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M(s, j) = \{k/2^j, 2^{j-s} \leq k \leq 2^{j-s+1}\}$. Так как φ непрерывна, то ψ равномерно непрерывна на отрезке $[2^{-s}, 2^{1-s}]$. Поэтому

$$\min_{x \in [2^{-s}, 2^{1-s}]} \psi(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \min_{x \in M(s, j)} \psi(x).$$

Согласно предложению 1 величина

$$\min_{x \in M(s, j)} \psi(x)$$

при $j \rightarrow \infty$ эквивалентна

$$2^{j-s} \leq k \leq 2^{j-s+1} k^{-\log_2 n} b(k).$$

Ясно, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \min_{2^{j-s} \leq k \leq 2^{j-s+1}} k^{-\log_2 n} b(k) = \liminf_{k \rightarrow \infty} k^{-\log_2 n} b(k).$$

Итак,

$$\inf_{x \in [2^{-s}, 2^{1-s}]} \psi(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} k^{-\log_2 n} b(k) = \nu_1.$$

То же верно и для ν_2 с заменой $\inf$ на $\sup$. Предложение доказано.

Итак, мы нашли выражения для констант ν_1, ν_2 . Они позволяют численно находить ν_1 и ν_2 с любой точностью. Для этого нужно приблизить функцию φ , что может быть сделано, например, с помощью той же уточняющей схемы. Ее скорость сходимости известна (замечание 1).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеем*

$$\nu_1 = \inf_{x \in (0, 1)} \psi(x), \quad \nu_2 = \sup_{x \in (0, 1)} \psi(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $\nu_1 = \nu_2$, то (следствие 1) на интервале $(0, 1)$ имеем $\varphi(x) \equiv Cx^{\log_2 n}$, где C — некоторая константа. Покажем, что тогда на каждом из интервалов $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, функция φ аналитическая. Для $k \leq 0$ это верно. Если это верно для $k \leq N$, то, применив (3), получаем

$$\varphi(x) = n\varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \sum_{k=0}^{2n-1} \varphi(x-k);$$

следовательно, φ аналитическая при $x \in (N, N+1)$. Так же показываем, что при любом $s \geq 1$ обе односторонние производные $\varphi^{(s)}(k+0)$ и $\varphi^{(s)}(k-0)$ существуют и конечны в каждой целой точке k . В самом деле, левая производная $\varphi^{(s)}(k-0)$ существует и конечна при всех $k \leq 0$ (там она равна нулю). Если она существует и конечна для всех $k \leq N-1$, то для $k = N$ используем то же уравнение и получаем

$$\varphi^{(s)}(N-0)(x) = 2^{-s} n \varphi^{(s)}\left(\frac{N}{2} - 0\right) - \sum_{k=0}^{2n-1} \varphi^{(s)}(N-k-0)$$

(при этом $N/2$ либо нецелое, а значит φ аналитична в этой точке, либо целое и меньшее N). Итак, левая производная существует и конечна во всех целых точках. То же верно и для правых производных (функция φ симметрична). Однако, если число $\log_2 n$ нецелое, то при $s > \log_2 n$ производная $\varphi^{(s)}(+0) = (Cx^{\log_2 n})^{(s)}(+0)$ обращается в бесконечность. Противоречие завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Вновь обратимся к уравнению (3). Как доказано в работе [6], если все его коэффициенты c_k неотрицательны и $\sum_k c_k = 2$, то оно имеет единственное, с точностью до домножения на константу, обобщенное решение φ с компактным носителем; это решение является борелевской вероятностной мерой, т.е. существует вероятностная мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что $(\varphi, f) = \int f d\mu$ для любой пробной функции f . Эта мера сосредоточена на отрезке $[0, d-1]$, причем мера любого интервала на этом отрезке положительна. Как показано в [8], эта мера всегда непрерывна и имеет чистый тип, т.е. либо абсолютно непрерывна ($\varphi \in L^1$), либо чисто сингулярна. Более того, если μ абсолютно непрерывна, то полином

$$m(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} c_k z^k$$

либо имеет нуль в точке $z = -1$, либо имеет пару симметричных нулей, т.е. $m(z) = m(-z) = 0$ для некоторого $z \neq 0$. Теперь возьмем нечетное $d = 2n + 1$ и рассмотрим масштабирующее уравнение с коэффициентами $c_k = 2/d$, $k = 0, \dots, d-1$. Тогда

$$m(z) = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} z^k = \frac{z^d - 1}{d(z - 1)}.$$

Поскольку $m(-1) = 1/d \neq 0$ и m не имеет симметричных нулей, мера μ чисто сингулярна. Пусть Γ — уточняющий оператор, соответствующий этому уравнению. Заметим, что для этого оператора также выполняется равенство (2). Доказывается это так же, как и в случае четного d . При этом мы пользуемся рекуррентным соотношением (1), в котором первая сумма берется от 0 до n , а не до $n-1$, как было для четных d . Для каждого j положим

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\Gamma^j g)_k \chi(2^j x - k),$$

где χ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$. Тогда последовательность φ_j сходится к φ в слабом смысле, т.е.

$$(\varphi_j, f) \rightarrow (\varphi, f) = \int f d\mu$$

для любой пробной функции f (доказательство см. [6]). Теперь нам понадобится следующий факт, доказанный в [5]: для каждого нечетного d найдутся положительные константы C_1, C_2 такие, что $C_1 k^{p_1} \leq b(k) \leq C_2 k^{p_2}$ для всех $k \geq 1$. Воспользовавшись (2), получаем

$$(\Gamma^j g)_k = \left(\frac{2}{d}\right)^j b(k);$$

таким образом,

$$C_1 \left(\frac{2}{d}\right)^j k^{p_1} \leq (\Gamma^j g)_k \leq C_2 \left(\frac{2}{d}\right)^j k^{p_2},$$

что при $k \in [2^{j-1}, 2^j)$ влечет

$$C_1 \frac{2}{d} k^{p_1 - \log_2(d/2)} \leq (\Gamma^j g)_k \leq C_2 k^{p_2 - \log_2(d/2)}.$$

Если $p_1 - \log_2(d/2) \geq 0$, то $2C_1/d \leq (\Gamma^j g)_k$ для всех $k \in [2^{j-1}, 2^j)$. Поэтому для каждого j имеем $\varphi_j(x) \geq 2C_1/d$ на отрезке $x \in [1/2, 1]$. Тогда и для предельной функции имеем $\varphi \geq 2C_1/d$ на отрезке $[1/2, 1]$. Это означает, что

$$\mu \geq \frac{2C_1}{d} \lambda,$$

где λ – мера Лебега на отрезке $[1/2, 1]$. Это противоречит сингулярности μ . Итак,

$$p_1 - \log_2 \left(\frac{d}{2} \right) < 0.$$

Предположив теперь, что

$$p_2 - \log_2 \left(\frac{d}{2} \right) \leq 0,$$

получаем $(\Gamma^j g)_k \leq C_2$ для всех $k \in [2^{j-1}, 2^j]$; таким образом, $\varphi \leq C_2$, что означает $\mu \leq C_2 \lambda$ на отрезке $[1/2, 1]$. Это невозможно, поскольку μ сингулярна и $\mu([0, 1/2]) > 0$. Таким образом, $p_2 > \log_2(d/2)$, что завершает доказательство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Euler L. // Opera Omnia Series Prima Opera Math. V. 8. Leipzig: Teubner, 1922.
2. Reznick B. // Analytic Number Theory (Urbana, IL, 1989). Progr. Math. V. 85. Boston, MA: Birkhäuser, 1990. P. 451–477.
3. Tanturri A. // Atti. Accad. Naz. Lincei. 1918. V. 27. P. 399–403.
4. Carlitz L. // Proc. Sympos. Pure Math. V. 8. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1965. P. 144–169; // Linear Alg. Appl. 1989. V. 114/115. P. 841–870.
5. Протасов В. Ю. // Матем. сб. 2000. Т. 191. №3. С. 65–98.
6. Cavaretta A. S., Dahmen W., Micchelli C. A. Stationary Subdivision // Mem. Amer. Math. Soc. 1991. V. 93. №453.
7. Daubechies I., Lagarias J. // SIAM. J. Math. Anal. 1991. V. 22. P. 1388–1410.
8. Protasov V. // J. Fourier Anal. Appl. 2000. V. 6. №6. P. 55–77.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vladimir_protasov@yahoo.com

Поступило
21.01.2004