Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Эминян, Оценка дробного момента одной тригонометрической суммы, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 312–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:34:50

ОЦЕНКА ДРОБНОГО МОМЕНТА ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

К. М. Эминян

Пусть $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$ – представление натурального числа n в двоичной системе счисления, $\varepsilon_k = 0, 1$.

Разобьем множество натуральных чисел на два непересекающихся класса следующим образом:

$$\mathbb{N}_0 = \left\{ n: n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 0 \pmod{2} \right\} \quad \text{и} \quad \mathbb{N}_1 = \left\{ n: n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \equiv 1 \pmod{2} \right\}.$$

В 1967 году Гельфонд в работе [1] получил, в частности, теорему: для числа целых n , $n \leq X$, удовлетворяющих условиям $n \equiv l \pmod{m}$, $n \in \mathbb{N}_0$, справедлива асимптотическая формула

$$T_0(X) = \frac{X}{2m} + O(X^\lambda), \quad (1)$$

где l и m – взаимно простые натуральные числа, $\lambda = (\ln 3)/(\ln 4) = 0.7924818 \dots$

Пусть

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \in \mathbb{N}_0, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство формулы (1) основано на оценке

$$|S(\alpha)| \ll 2^{\lambda N} \quad (2)$$

тригонометрической суммы

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{2^{N+1}-1} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \prod_{r=0}^{N-1} (1 - e^{2\pi i \alpha 2^r}),$$

которая справедлива при любых вещественных значениях α . Оценка (2) неулучшаема, так как

$$\left| S\left(\frac{1}{3}\right) \right| = (\sqrt{3})^N = 2^{\lambda N}.$$

Первый момент суммы $S(\alpha)$ может быть оценен сверху меньшей величиной, например, так:

$$\int_0^1 |S(\alpha)| d\alpha \leq 2^{\lambda_1 N}, \quad (3)$$

где $\lambda_1 = \log_2 \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 0.88577 \dots$

Оценка (3) позволила автору получить в [2] формулу

$$\sum_{n \leq X, n \in \mathbb{N}_0} \tau(n) = \frac{1}{2} X (\ln X + 2\gamma - 1) + O(X^\omega \ln^2 X),$$

где γ – постоянная Эйлера, $\omega = (1 + \log_2 \sqrt{2 + \sqrt{2}})/2 = 0.942883 \dots$

В настоящей работе дана верхняя оценка дробного момента суммы $S(\alpha)$. Кроме того, получены оценки и асимптотическая формула для дробных моментов тригонометрической суммы, тесно связанной с $S(\alpha)$.

Отметим, что при $0 < \varepsilon < 0,01$ неравенство

$$\int_0^1 |S(\alpha)| d\alpha \leq \left(\frac{4}{\pi} (1 + \varepsilon) \right)^{N+1}$$

неверно, так как оно противоречит полученному в [3] неравенству

$$\int_0^1 |S(\alpha)| d\alpha \geq 2^{\lambda_2 N},$$

где $\lambda_2 = 0,390 \dots$

ТЕОРЕМА. Пусть ε — произвольное число такое, что $0 < \varepsilon < 0.01$, k — натуральное число, $k > \log_2([1/\varepsilon] + 1)$. Тогда справедлива оценка

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^{1/k} d\alpha \leq \left(\frac{4}{\pi}(1+\varepsilon)\right)^{N/k+1}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (4) можно записать в следующем виде:

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^{1/k} d\alpha \leq 2 \cdot 2^{\rho N/k},$$

где $\rho = 0,34 \dots + \log_2(1+\varepsilon)$.

Отметим, что

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^{1/k} d\alpha \leq 2^{N/k}$$

— тривиальная оценка дробного момента $S(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Справедливо тождество

$$|S(\alpha)|^{1/k} = \prod_{j=0}^{k-1} \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} (2|\sin \pi \alpha 2^r|)^{1/k}.$$

Введем обозначение

$$|S_j(\alpha)| = \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} 2|\sin \pi \alpha 2^r|,$$

тогда

$$|S(\alpha)|^{1/k} = \prod_{j=0}^{k-1} |S_j(\alpha)|^{1/k}.$$

Пользуясь неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим, имеем

$$|S(\alpha)|^{1/k} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} |S_j(\alpha)|.$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно для любого $0 \leq j \leq k-1$ получить неравенство

$$\int_0^1 |S_j(\alpha)| d\alpha \leq \left(\frac{4}{\pi}(1+\varepsilon)\right)^{N/k+1}. \quad (5)$$

Разложим функцию $|\sin \pi x|$ в ряд Фурье:

$$|\sin \pi x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{4n^2 - 1}.$$

Пусть $X = [1/\varepsilon] + 1$, тогда $|\sin \pi x| = S_X(x) + R_X(x)$, где

$$S_X(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^X \frac{\cos 2\pi n x}{4n^2 - 1}, \quad R_X(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=X+1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{4n^2 - 1}.$$

Оценим $R_X(x)$ тривиально:

$$|R_X(x)| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=X+1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi(2X+1)} < \frac{1}{\pi X} < \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

Отсюда для любого вещественного x имеем неравенство

$$|\sin \pi x| \leq S_X(x) + \frac{\varepsilon}{\pi} = F_X(x), \quad (6)$$

где

$$F_X(x) = \sum_{n=-X}^X c_n e^{2\pi i n x}, \quad c_0 = \frac{2}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi}, \quad c_n = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1},$$

$0 < |n| \leq X$. Пусть L_j – число сомножителей в произведении, определяющем $S_j(\alpha)$, т.е. $L_j = [(N-1-j)/k] + 1$. Тогда

$$|S_j(\alpha)| = 2^{L_j} \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} |\sin \pi \alpha 2^r|.$$

Подставляя сюда неравенство (6), полагая в нем x равным $\alpha 2^j$, $\alpha 2^{j+k}$, $\alpha 2^{j+2k}$, ..., получаем, что при любом вещественном α справедливо неравенство

$$|S_j(\alpha)| \leq 2^{L_j} \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} F_X(\alpha 2^r).$$

Проинтегрируем последнее неравенство по α :

$$\int_0^1 |S_j(\alpha)| d\alpha \leq 2^{L_j} \int_0^1 \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} F_X(\alpha 2^r) d\alpha.$$

По определению имеем

$$\int_0^1 \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} F_X(\alpha 2^r) d\alpha = \sum_{n_1, \dots, n_{L_j}} c_{n_1} \cdots c_{n_{L_j}} \int_0^1 \exp(2\pi i \alpha (n_1 2^j + \cdots + n_{L_j} 2^{j+(L_j-1)k})) d\alpha.$$

Последний интеграл равен 1, если

$$n_1 + n_2 2^k + n_3 2^{2k} + \cdots + n_{L_j} 2^{(L_j-1)k} = 0, \quad (7)$$

и 0 в противном случае.

Рассмотрим уравнение (7). Если набор чисел $(n_1, n_2, \dots, n_{L_j})$ ему удовлетворяет, то $2^k \mid n_1$, в то же время $|n_1| \leq X$ и по условию $2^k > X$. Следовательно, $n_1 = 0$. Аналогично рассуждая, приходим к равенствам $n_2 = n_3 = \cdots = n_{L_j} = 0$. Тем самым, получено неравенство

$$\int_0^1 |S_j(\alpha)| d\alpha \leq \left(2 \left(\frac{2}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi}\right)\right)^{L_j} \leq \left(\frac{4}{\pi}(1 + \varepsilon)\right)^{N/k+1}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы справедливы неравенства

$$\left(\frac{4}{\pi}(1-\varepsilon)\right)^{L_j} \leq \int_0^1 |S_j(\alpha)| d\alpha \leq \left(\frac{4}{\pi}(1+\varepsilon)\right)^{L_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство

$$\int_0^1 |S_j(\alpha)| d\alpha \leq \left(\frac{4}{\pi}(1+\varepsilon)\right)^{L_j}$$

выведено при доказательстве теоремы. Докажем справедливость второго неравенства. Для этого заметим, что при любом вещественном x

$$\left|S_X(x) - \frac{\varepsilon}{\pi}\right| \leq |\sin \pi x|.$$

Далее, из определений легко вытекает справедливое для всех вещественных x неравенство $S_X(x) \geq 0$, из которого получаем, что

$$|P_X(x)| \leq |\sin \pi x|, \quad (8)$$

где

$$P_X(x) = \sum_{n=-X}^X a_n e^{2\pi i n x}, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} - \frac{\varepsilon}{\pi}, \quad a_n = c_n = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1},$$

$0 < |n| \leq X$. Полагая в (8) x равным $\alpha 2^j, \alpha 2^{j+k}, \dots, \alpha 2^{j+L_j-1}$ и перемножая соответствующие неравенства, имеем

$$\int_0^1 \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} |P_X(\alpha 2^r)| d\alpha \leq \int_0^1 |S_j(\alpha)| d\alpha.$$

Интеграл, стоящий слева, вычисляется так же, как интеграл

$$\int_0^1 \prod_{\substack{r=0 \\ r \equiv j(k)}}^{N-1} F_X(\alpha 2^r) d\alpha,$$

и равен $(4(1-\varepsilon)/\pi)^{L_j}$. Следствие 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $k \geq \log_2 N$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_0^1 |S_j(\alpha)| d\alpha = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{(N+k-j)/k} (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в следствии 1 параметр $\varepsilon, k = [\log_2 4/\varepsilon]$. Тогда $k \geq \log_2([1/\varepsilon] + 1)$, $k < \log_2(4/\varepsilon) + 1, \varepsilon < 8/2^k \leq 8/N, (1 \pm \varepsilon/2)^{N/k} \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$. Теперь следствие 2 вытекает из неравенств следствия 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfond A. O. // Acta Arith. 1968. V. 12. P. 259–265.
2. Эминян К. М. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 680–686.
3. Эминян К. М. // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 1. С. 133–143.