Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Романова, Я. Т. Султанаев, Спектральные свойства дифференциального оператора $(2N)$ -го порядка, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 303–307

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:12:35

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА $(2N)$ -ГО ПОРЯДКА

О. А. Романова, Я. Т. Султанаев

1. Одной из центральных задач спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов является исследование их спектральных свойств в зависимости от поведения коэффициентов соответствующего дифференциального выражения (см. [1]–[3]). Мы рассматриваем минимальный дифференциальный оператор, порожденный в $\mathbb{L}^2[0, \infty)$ дифференциальным выражением

$$ly = (-1)^n y^{2n} + (q_1(x) + q_2(x))y, \quad (1)$$

где $q_1(x)$ – дважды непрерывная дифференцируемая вещественная функция, а $q_2(x)$ – вещественная непрерывная функция.

Введем обозначения

$$F(x, \lambda, \mu) = \mu^{2n} + (-1)^n (q_1(x) - \lambda),$$

$$y_{k0}(x, \lambda) = \left[\frac{\partial F(x, \lambda, \mu_k)}{\partial \mu} \right]^{-1/2} \exp \left\{ \int_0^x \mu_k(t, \lambda) dt \right\}, \quad k = \overline{1, 2n},$$

где $\mu_k(x, \lambda)$ – корни уравнения $F(x, \lambda, \mu) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) $|q_1(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$;
- 2) при достаточно большом $R > 0$ при $x \geq R$ функция $q_1'(x)$ не меняет знак и

$$|q_1'(x)| = o(|q_1(x)|^\alpha), \quad 0 < \alpha < \frac{1+2n}{2n};$$

- 3) интеграл

$$\int_x^\infty \frac{|q_1''(\xi)|}{|q_1(\xi)|^{(1+2n)/(2n)}} d\xi < \infty;$$

- 4) интеграл

$$\left| \int_x^\infty q_2(t) dt \right| < \infty;$$

5) интеграл

$$\int_x^\infty \left| |q_1(\xi)|^{(1-n)/n} \int_\xi^\infty q_2(t) dt \right| d\xi < \infty.$$

Тогда уравнение

$$ly = \lambda y, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad (2)$$

имеет $2n$ линейно независимых решений $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_{2n}(x, \lambda)$ таких, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$y_k(x, \lambda) = y_{k0}(x, \lambda)[1 + o(1)], \quad k = \overline{1, 2n}.$$

Прежде чем наметить идею доказательства теоремы 1, заметим, что условия 1)–3) являются классическими. Они означают, что функция $q_1(x)$ имеет регулярный рост на бесконечности. Условие 4) означает, что интеграл сходится условно, а условие 5) означает, что усреднение $q_2(x)$ подчинено в смысле роста функции $q_1(x)$. Условия 1)–5) выполняются, например, если $q_1(x) = x^\alpha$, $q_2(x) = x^\alpha \sin e^x$, $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заменим уравнение (2) системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем в рассмотрение вектор-столбец $Y(x, \lambda)$, состоящий из квазипроизводных функции $y(x, \lambda)$ (см. [1]). Полученная система первого порядка $Y' = [A(x, \lambda) + D(x)]Y$, где $D(x)$ задается соотношениями

$$d_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1, 2n}, \quad i \neq 2n, \quad j \neq 1, \quad d_{2n,1} = q_2(x),$$

с помощью подходящего преобразования приводится к виду $Z' = (\Lambda(x, \lambda) + Q(x, \lambda))Z$, где $\Lambda(x, \lambda)$ – диагональная матрица, а $Q(x, \lambda) = (E + G)^{-1}(-MG - G') - (E + G)^{-1}T^{-1}DT(E + G)$. Здесь матрица $T(x, \lambda)$ приводит матрицу $A(x, \lambda)$ к диагональному виду, т.е.

$$T^{-1}(x, \lambda)A(x, \lambda)T(x, \lambda) = \operatorname{diag}[\mu_1(x, \lambda), \dots, \mu_{2n}(x, \lambda)] = \Lambda(x, \lambda),$$

$T(x, \lambda) = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^{2n}$ такая, что $t_{ij} = \varepsilon_i \mu_j^{i-1} \delta_j$, где $\varepsilon_i = 1$ для $1 \leq i \leq n+1$ и $i = n+3, n+5, \dots$ и $\varepsilon_i = -1$ для $i = n+2, n+4, \dots$; $i, j = \overline{1, 2n}$. Выбираем δ_j так, чтобы

$$M(x, \lambda)_{ii} = \{m_{ii}(x, \lambda)\}_{i=1}^{2n} = (T^{-1}(x, \lambda)T'(x, \lambda))_{ii} = 0.$$

Решая эти дифференциальные уравнения, находим

$$\delta_j = \left[\frac{\partial F(x, \lambda, \mu_j)}{\partial \mu} \right]^{-1/2}, \quad j = \overline{1, 2n}.$$

Матрица $G(x, \lambda)$ задается соотношениями $g_{ii} = 0$ и $g_{ij} = m_{ij}/(\mu_i - \mu_j)$.

Далее, полагая при фиксированном i , $i = \overline{1, 2n}$,

$$Z = V \exp \left(\int_0^x \mu_i(t, \lambda) dt \right),$$

где $V = \operatorname{col}(V_1, V_2, \dots, V_{2n})$ – неизвестная вектор-функция, придем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dV_j(x, \lambda)}{dx} = \omega_j(x, \lambda)V_j(x, \lambda) + \sum_{k=1}^{2n} Q_{jk}(x, \lambda)V_k(x, \lambda),$$

где $j = \overline{1, 2n}$, $\omega_j(x, \lambda) = \mu_j(x, \lambda) - \mu_i(x, \lambda)$. Рассматривая каждое из этих уравнений как уравнение первого порядка с правой частью

$$\sum_{k=1}^{2n} Q_{jk}(x, \lambda)V_k(x, \lambda),$$

мы получим для функций $V_j(x, \lambda)$ систему интегральных уравнений. Основным в доказательстве теоремы является разложение по частям всех интегралов полученной системы, содержащих функцию $q_2(x)$. Так в случае $q_2(x) = x^\alpha \sin e^x$ при интегрировании по частям все соответствующие слагаемые приобретут убывающий множитель e^{-x} . Интегралы, не содержащие функцию $q_2(x)$, оставляем без изменения. Далее для этой системы применяем метод последовательных приближений. Получаем

$$\begin{aligned} & V_j^{(n+1)}(x, \lambda) \\ &= \int_{x_j}^x (\lambda - q_1(\xi))^{(1-2n)/(2n)} \int_{\xi}^{\infty} q_2(t) dt \left[\omega_j(\xi, \lambda) \sum_{k=1}^{2n} L_{jk}(\xi, \lambda) V_k^{(n)}(\xi, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + L'_{jk}(\xi, \lambda) V_k^{(n)}(\xi, \lambda) - \sum_{k=1}^{2n} L_{jk}(\xi, \lambda) (V_k^{(n)}(\xi, \lambda))' \right] \exp \left\{ \int_{\xi}^x \omega_j(t, \lambda) dt \right\} d\xi \\ &\quad - \frac{1-2n}{2n} \int_{x_j}^x \exp \left\{ \int_{\xi}^x \omega_j(t, \lambda) dt \right\} (\lambda - q_1(\xi))^{(1-2n)/(2n)} \\ &\quad \times \int_{\xi}^{\infty} q_2(t) dt q_1'(\xi) \sum_{k=1}^{2n} L_{jk}(\xi, \lambda) V_k^{(n)}(\xi, \lambda) d\xi \\ &\quad + \exp \left\{ \int_{\xi}^x \omega_j(t, \lambda) dt \right\} (\lambda - q_1(\xi))^{(1-2n)/(2n)} \sum_{k=1}^{2n} L_{jk}(\xi, \lambda) V_k^{(n)}(\xi, \lambda) \int_{\xi}^{\infty} q_2(t) dt \Big|_{x_j}^x \\ &\quad + \int_{x_j}^x \sum_{k=1}^{2n} (E + G_{jk}(\xi, \lambda))^{-1} (C^1 q_1''(\xi) (\lambda - q_1(\xi))^{(-1-2n)/(2n)} \\ &\quad + C^2 (q_1'(\xi))^2 (\lambda - q_1(\xi))^{(-1-4n)/(2n)}) \exp \left\{ \int_{\xi}^x \omega_j(t, \lambda) dt \right\} V_k^{(n)}(\xi, \lambda) d\xi \\ &\quad + k_j \exp \left\{ \int_{\xi}^x \omega_j(t, \lambda) dt \right\}, \\ & (V_j^{(n+1)}(x, \lambda))' = \omega_j(x, \lambda) V_j^{(n)}(x, \lambda), \end{aligned}$$

где $(E + G)^{-1} C (E + G) = L(x, \lambda) = \{L_{jk}(x, \lambda)\}_{j,k=1}^{2n}$, C , C^1 , C^2 — постоянные матрицы с элементами c_{ij} , c_{ij}^1 , c_{ij}^2 соответственно.

Рассмотрим

$$(E + G)^{-1} T^{-1} D T (E + G) = q_2(x) (\lambda - q_1(x))^{(1-2n)/(2n)} (E + G)^{-1} C (E + G).$$

Учитывая, что $\|(T + G(x, \lambda))^{-1}\| \leq \text{const}$, если $|q_1(x)| \rightarrow \infty$, получаем

$$L(x, \lambda) = (E + G)^{-1} C (E + G) = (E + G)^{-1} C + (E + G)^{-1} C G$$

и соответственно

$$\begin{aligned} |L(x, \lambda)| &\leq |(E + G)^{-1} C| + |(E + G)^{-1} C G| \\ &\leq \text{const} + \text{const} |q_1'(x) (\lambda - q_1(x))^{(-1-2n)/(2n)}| \leq \text{const}, \end{aligned}$$

если выполняется условие 2) теоремы 1.

Из равенства $L'(x, \lambda) = ((E + G)^{-1})' C (E + G) + (E + G)^{-1} C (E + G)'$ и тождества $(E + G)^{-1} \times (E + G) = E$ и соответственно $((E + G)^{-1} (E + G))' = 0$ мы находим, что $((E + G)^{-1})' = (E + G)^{-1} \times (E + G)' (E + G)^{-1}$ и

$$\begin{aligned} |L'(x, \lambda)| &= |(E + G)^{-1} (E + G)' (E + G)^{-1} C (E + G) + (E + G)^{-1} C (E + G)'| \\ &\leq |(E + G)^{-1} (E + G)' L(x, \lambda) + (E + G)^{-1} C (E + G)'| \\ &\leq |(E + G)^{-1} G' L(x, \lambda) + (E + G)^{-1} C G'| \leq \text{const} |G'|. \end{aligned}$$

Значит, если условия теоремы 1 выполняются, получаем

$$|L'(x, \lambda)| \leq \text{const } |q_1''(x)(\lambda - q_1(x))^{(-1-2n)/(2n)}| + \text{const}.$$

Введем обозначения

$$\text{Re } \omega_j(x, \lambda) = \nu_j(x, \lambda), \quad \nu_j = \int_0^\infty \nu_j(x, \lambda) dx.$$

Далее, переписываем полученную систему в зависимости от поведения ν_j , как в [1, с. 288].

При $j = i$, $x_i = \infty$ получаем $k_i = 1$, $\omega_i(x, \lambda) = 0$. Положим

$$P_n = \sup_{x \geq 0, 1 \leq j \leq n} |V_j^{(n)}(x, \lambda) - V_j^{(n-1)}(x, \lambda)|.$$

Тогда $|V_i^{(n+1)}(x, \lambda) - V_i^{(n)}(x, \lambda)| \leq P_n \text{const}$ при выполнении условий теоремы 1.

Случаи, когда $j \neq i$, $\nu_j = -\infty$ и $j \neq i$, $\nu_j > -\infty$, рассматриваются так же, как в [1, с. 291–292]. Поэтому ряд

$$V_j(x, \lambda) = V_j^{(0)}(x, \lambda) + [V_j^{(1)}(x, \lambda) - V_j^{(0)}(x, \lambda)] + [V_j^{(2)}(x, \lambda) - V_j^{(1)}(x, \lambda)] + \dots$$

сходится. Соответственно $V_i \sim 1$, $V_j \sim 0$. Возвращаясь к старой переменной Y , получаем, что теорема 1 доказана.

2. Рассмотрим минимальный дифференциальный оператор $L^2[0, \infty)$, порожденный дифференциальным выражением (1). Асимптотические формулы, полученные в теореме 1, позволяют сделать вывод об индексах дефекта этого оператора.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q_1(x)$ – дважды непрерывная дифференцируемая вещественная функция такая, что $q_1(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и выполняются условия теоремы 1, а также справедливо соотношение

$$\int_0^\infty |q_1(x)|^{(1-2n)/(2n)} < \infty. \quad (3)$$

Тогда индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L^2[0, \infty)$ дифференциальным выражением (1) на положительной полуоси, равны (n, n) , если $n = 2m$, и $(n+1, n+1)$, если $n = 2m+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем поведение характеристических корней $\mu_j(x, \lambda)$ при $x \rightarrow +\infty$. Рассмотрим два возможных случая.

а) Случай $n = 2m$. Тогда $\mu_j(x, \lambda) = \varepsilon_j \sqrt[2n]{-\lambda + q_1(x)}$. Здесь ε_j – корни $(2n)$ -ой степени из -1 . Имеем

$$\sqrt[4m]{-1} = \cos \frac{(1+2k)\pi}{4m} + i \sin \frac{(1+2k)\pi}{4m}, \quad k = \overline{0, 4m-1}.$$

Неравенство $\cos((1+2k)\pi/(4m)) < 0$ удовлетворяется при $(2m-1)/2 < k < (6m-1)/2$, $k = m, 3m-1$, т.е. имеет $2m$ решений. Аналогичное неравенство $\cos((1+2k)\pi/(4m)) > 0$ имеет $2m$ решений, причем уравнение $\cos((1+2k)\pi/(4m)) = 0$ не имеет решений ни при каких целых k . Вместе с условием (3) проведенные рассуждения показывают, что у уравнения $ly = \lambda y$ есть n линейно независимых решений, принадлежащих $L^2[0, \infty)$, но это и означает, что индексы дефекта оператора L_0 на положительной полуоси равны (n, n) .

б) Случай $n = 2m+1$. Рассуждения проводятся аналогично случаю а). Только в этом случае среди корней $\sqrt[4m+2]{-1}$ ровно по $(n-1)$ корней с отрицательными и положительными вещественными частями и 2 чисто мнимых корня. И вместе с условием (3) мы получаем ровно $(n+1)$ линейно независимых решений, принадлежащих $L^2[0, \infty)$. Соответственно индексы дефекта будут $(n+1, n+1)$.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 1, условие (3) и $q_1(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L^2[0, \infty)$ дифференциальным выражением (1) на положительной полуоси, равны $(n+1, n+1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия теоремы 1, $|q_1(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и выполняется соотношение

$$\int_0^\infty |q_1(x)|^{(1-2n)/(2n)} = \infty.$$

Тогда индексы дефекта минимального дифференциального оператора L_0 , порожденного в $L^2[0, \infty)$ дифференциальным выражением (1) на положительной полуоси, равны (n, n) .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 2. Федорюк М. В. // Матем. сб. 1969. Т. 79. № 4(8). С. 477–516. 3. Султанаев Я. Т. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 2010–2020.

(О. А. Романова) Башкирский государственный педагогический университет
(Я. Т. Султанаев) Башкирский государственный университет
E-mail: ol-romanova@yandex.ru, sultanaevYT@bsu.bashedu.ru

Поступило
26.01.2004