Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сидорова, Предельное поведение поверхностных мер на пространствах траекторий, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 307–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:44:18

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ МЕР НА ПРОСТРАНСТВАХ ТРАЕКТОРИЙ

Н. А. Сидорова

Введение. В работе рассматриваются поверхностные меры на пространстве траекторий $C([0, T], M)$ в компактном римановом многообразии M , вложенном в объемлющее пространство (евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ или другое многообразие). Эти меры (называемые также *поверхностными мерами Смолянова*) были впервые введены в [1] и затем исследовалось в [2] для случая $T = 1$. В данной работе описываются эти меры для произвольного T , а также исследуется их сходимость при $T \rightarrow \infty$ в случае, когда M одномерно.

1. Поверхностные меры для произвольных интервалов времени. Пусть M – компактное риманово многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^n$ и $a_0 \in M$ – фиксированная точка. Пусть $M_\varepsilon = \{a \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(a, M) \leq \varepsilon\}$ – трубчатая ε -окрестность многообразия M , где dist обозначает евклидову метрику в $\mathbb{R}^n$.

Пусть A – одно из множеств $\mathbb{R}^n$, M или M_ε . Обозначим $C_{a_0}([0, T], A)$ пространство непрерывных функций из $[0, T]$ в A , равных a_0 в нуле.

Пусть (b_t) – броуновское движение в $\mathbb{R}^n$ с началом в точке a_0 . Обозначим символом $\mathbb{W}_{\varepsilon, T}$ вероятностную меру на пространстве $C_{a_0}([0, T], \mathbb{R}^n)$ (сконцентрированную на множестве $C_{a_0}([0, T], M_\varepsilon)$), являющуюся условным распределением случайного процесса (b_t) при условии, что он не покидает трубчатую ε -окрестность многообразия вплоть до времени T , т.е.

$$\mathbb{W}_{\varepsilon, T} = \frac{\mathbb{W}_T|_{C_{a_0}([0, T], M_\varepsilon)}}{\mathbb{W}_T(C_{a_0}([0, T], M_\varepsilon))},$$

где $\mathbb{W}_T$ – стандартная мера Винера на $C_{a_0}([0, T], \mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слабый предел $\mathbb{S}_T$ семейства мер $\mathbb{W}_{\varepsilon, T}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ называется *поверхностной мерой* на пространстве $C_{a_0}([0, T], M)$.

Обобщая результаты [2] на случай произвольного T , мы получаем, что эта мера существует, абсолютно непрерывна относительно меры Винера $\mathbb{W}_T^M$ на пространстве путей в многообразии до времени T , и ее плотность Радона–Никодима задается формулой

$$\frac{d\mathbb{S}_T}{d\mathbb{W}_T^M}(\omega) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^T R(\omega_s) ds + \frac{1}{8}\int_0^T \|\sigma\|^2(\omega_s) ds\right\}}{\mathbb{E}_{\mathbb{W}_T^M} \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^T R(\omega_s) ds + \frac{1}{8}\int_0^T \|\sigma\|^2(\omega_s) ds\right\}},$$

где R – скалярная кривизна, а σ – вектор средней кривизны многообразия, умноженный на его размерность. В случае, когда M – компактное одномерное многообразие (т.е. замкнутая кривая) в $\mathbb{R}^n$, эта формула записывается в виде

$$\frac{d\mathbb{S}_T}{d\mathbb{W}_T^M}(\omega) = \frac{\exp\left[\int_0^T v(\omega_s) ds\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{W}_T^M} \exp\left[\int_0^T v(\omega_s) ds\right]}, \quad \text{где } v(a) = \frac{1}{8}\kappa^2(a),$$

а κ – кривизна кривой.

Далее мы рассматриваем случай $\dim M = 1$. Обозначим через $(y_t^T), t \leq T$, случайный процесс в M с началом в a_0 , соответствующий мере $\mathbb{S}_T$.

ТЕОРЕМА 1. Для каждого T случайный процесс $(y_t^T), t \leq T$, удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dy_t^T = db_t + (\nabla \log u)(T - t, y_t^T) dt \quad (1)$$

с начальным условием $y_0^T = a_0$, где u – решение уравнения

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \Delta u + vu \quad (2)$$

с начальным условием $u(0, x) = 1$ для всех x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что вместо мер, процессов и уравнений, соответствующих замкнутой кривой, можно рассматривать их периодические аналоги, соответствующие $\mathbb{R}$. По формуле Фейнмана–Каца

$$u(t, x) = \mathbb{E}_{W_T^x} \exp\left[\int_0^t v(\omega_s) ds\right],$$

где W_T^x – мера Винера на $C_x([0, T], \mathbb{R})$. Рассмотрим (y_t^T) как координатный процесс (ω_t) на вероятностном пространстве $(C_0([0, T], \mathbb{R}), \mathcal{F}_T, \mathbb{S}_T)$. Так как (ω_t) – броуновское движение относительно меры Винера $\mathbb{W}_T^0$, эквивалентной мере $\mathbb{S}_T$, то мы получаем по теореме Гирсанова $d\omega_t = db_t + dr_t d\omega_t/r_t$, где

$$\begin{aligned} r_t &= \mathbb{E}[d\mathbb{S}_T/d\mathbb{W}_T^0 | \mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}[\exp(\int_0^T v(\omega_s) ds) | \mathcal{F}_t]}{u(T, 0)} \\ &= \frac{\exp(\int_0^t v(\omega_s) ds) \mathbb{E}[\exp(\int_t^T v(\omega_s) ds) | \mathcal{F}_t]}{u(T, 0)} = \frac{\exp[\int_0^t v(\omega_s) ds] u(T - t, \omega_t)}{u(T, 0)}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{dr_t d\omega_t}{r_t} &= \frac{(\exp[\int_0^t v(\omega_s) ds] \nabla u(T - t, \omega_t) dt) / u(T, 0)}{(\exp[\int_0^t v(\omega_s) ds] u(T - t, \omega_t)) / u(T, 0)} \\ &= \nabla \log u(T - t, \omega_t) dt, \end{aligned}$$

что приводит к искомому коэффициенту сноса в уравнении (1).

2. Сходимость при $T \rightarrow \infty$. Заметим, что для различных T меры $\mathbb{S}_T$ определены на разных пространствах $C_{a_0}([0, T], M)$ и доопределим их (произвольно) до счетно-аддитивных мер на общем пространстве $C_{a_0}([0, \infty], M)$.

ЛЕММА 1. *Линейный оператор $\frac{1}{2}\Delta + v$ обладает ровно одним собственным значением s , обладающим тем свойством, что соответствующая ему собственная функция φ положительна. В этом случае φ единственна с точностью до умножения на положительное число.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы снова будем рассматривать периодическую интерпретацию в $\mathbb{R}$. В этом случае искомая собственная функция должна быть не только положительной, но еще и периодической.

Обозначим

$$L = \frac{1}{2}\Delta + v \quad \text{и} \quad C_L(\mathbb{R}) = \{u \in C^2(\mathbb{R}) : Lu = 0 \text{ и } u > 0\}.$$

Согласно [3] (см. также [4]) для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\begin{aligned} \Gamma_\lambda &= \{\nu \in \mathbb{R} : \exists u \in C_{L-\lambda}(\mathbb{R}), \text{ имеющая вид } u(t) = e^{\nu t} \psi_\nu(t), \\ &\quad \text{где } \psi_\nu - \text{периодическая функция}\}, \\ K_\lambda &= \{\nu \in \mathbb{R} : \exists u \in C^2(\mathbb{R}) \text{ такая, что } (L - \lambda)u \leq 0 \text{ и } u > 0, \\ &\quad \text{и имеющая вид } u(t) = e^{\nu t} \psi_\nu(t), \text{ где } \psi_\nu - \text{периодическая функция}\}. \end{aligned}$$

По теореме A1 из [3] существует действительное число λ^* такое, что

- 1) если $\lambda = \lambda^*$, то $\Gamma_\lambda = K_\lambda = \{\nu_0\}$ с некоторым $\nu_0 \in \mathbb{R}$;
- 2) если $\lambda < \lambda^*$, то $\Gamma_\lambda = K_\lambda = \emptyset$;
- 3) если $\lambda > \lambda^*$, то K_λ строго выпукло и компактно, а $\Gamma_\lambda = \partial K_\lambda$;
- 4) $K_{\lambda_1} \subsetneq K_{\lambda_2}$ для всех $\lambda^* \leq \lambda_1 < \lambda_2$;
- 5) $K_\lambda^* = -K_\lambda$, где K^* соответствует сопряженному оператору L^* .

Далее, согласно следствию A3 из [3] для каждой функции $u \in C_{L-\lambda}(\mathbb{R})$ существует единственная конечная мера μ_u на множестве Γ_λ такая, что

$$u(t) = \int_{\Gamma_\lambda} e^{\nu t} \psi_\nu(t) \mu_u(d\nu), \quad (3)$$

где для каждого $\nu \in \Gamma_\lambda$ соответствующая функция ψ_ν является периодической. Поскольку в нашем случае оператор L является самосопряженным, мы имеем $K_{\lambda^*} = -K_{\lambda^*}$ и, следовательно, $\nu_0 = 0$ согласно свойству 5).

Пусть $c = \lambda^*$ и $u \in C_{L-c}(\mathbb{R})$; по формуле (3) и свойствам 1) и 5) $u(x) = K \psi_{\nu_0}(x)$, где $K > 0$ – некоторая константа. Следовательно, множество положительных собственных функций оператора $\frac{1}{2}\Delta + v$ с собственным значением $c = \lambda^*$ состоит из единственной (с точностью до умножения на положительное число) функции, которая, кроме того, является периодической.

Если $c < \lambda^*$, то $\Gamma_c = \emptyset$ согласно свойству 2), и $C_{L-c}(\mathbb{R}) = \emptyset$ вследствие (3). Если же $c > \lambda^*$, то по лемме 3 из [3] $\Gamma_\lambda = \{\nu \in \mathbb{R} : \lambda_0(\nu) = \lambda\}$, где λ_0 – некоторая непрерывная функция. Следовательно, $0 = \nu_0 \notin \Gamma_c$. Согласно свойствам 3) и 4) мы получаем $K_c = [a_c, b_c]$, где $a_c < 0 < b_c$, и $\Gamma_c = \{a_c, b_c\}$. Пусть $u \in C_{L-c}(\mathbb{R})$, тогда

$$u(t) = e^{a_c t} \psi_{a_c}(t) \mu(\{a_c\}) + e^{b_c t} \psi_{b_c}(t) \mu(\{b_c\})$$

вследствие (3), и, следовательно, u не может быть периодической. Таким образом, у оператора $\frac{1}{2}\Delta + v$ не существует положительных периодических собственных функций с собственными значениями $c \neq \lambda^*$.

ЛЕММА 2. Имеет место равенство $u(t, x) = e^{ct} \varphi(x) w(t, x)$, где $w(t, x)$ – решение уравнения

$$\partial_t w = Lw \quad \text{с оператором} \quad L = \frac{1}{2} \Delta + (\nabla \log \varphi) \nabla. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно подставить функцию $u(t, x) = e^{ct} \varphi(x) w(t, x)$ в уравнение (2) и воспользоваться тем фактом, что φ – собственная функция оператора $\frac{1}{2} \Delta + v$ с собственным значением c .

ЛЕММА 3. Пусть w – решение уравнения (4) с некоторым непрерывным начальным условием f . Тогда

- 1) $w(t, x) \rightarrow c$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x ; если $f > 0$, то $c \neq 0$;
- 2) $\nabla w(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x ;
- 3) если $f > 0$, то $\nabla \log w(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть (y_t) – случайный процесс на M с генератором L с началом в точке $x \in M$. Обозначим символом P_x его закон распределения. Так как (y_t) – диффузионный процесс на окружности, он обладает инвариантной мерой μ такой, что $\mu(M) = 1$ (см., например, [3]). Тогда по теореме 3.4 из [5] мы имеем

$$w(t, x) \rightarrow \int_M f(x) \mu(dx) = c,$$

и $c > 0$ для положительных f , поскольку мера μ положительна.

Чтобы доказать, что эта сходимостъ является равномерной, зафиксируем какое-нибудь $x_0 \in M$. Пусть τ – марковский момент времени, когда случайный процесс (y_t) приходит в точку x_0 . Обозначим $g(t, x) = P_x(\tau > t)$ и заметим, что функция g непрерывна и $g(t_2, x) \leq g(t_1, x)$ при $t_2 > t_1$. По лемме 5.2 из [5] случайный процесс (y_t) является возвратным, так как уравнение $Lu = 0$ имеет единственное ограниченное решение на произвольном интервале $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с заданными граничными условиями. Следовательно, $g(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, и из монотонности функции g следует, что эта сходимостъ равномерна по x .

Далее, мы имеем $w(t, x) = \mathbb{E}_x f(y_t)$. Пусть $\varepsilon > 0$; вследствие уже доказанной поточечной сходимости найдется число $T_1 > 0$ такое, что для любого $t > T_1$ выполняется

$$|w(t, x_0) - c| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вследствие равномерной сходимости $g(t, x) = P_x\{\tau > t\} \rightarrow 0$ найдется число $T_2 > 0$ такое, что для любого $t > T_2$ и для любого x выполняется

$$P_x\{\tau > \log t\} < \frac{\varepsilon}{2(c + \|f\|)}.$$

Наконец, найдется число $T_3 > 0$ такое, что для любого $t > T_3$ выполняется $t - \log t > T_1$. Пусть $T_0 = \max\{T_1, T_2, T_3\}$. Обозначим плотность распределения случайной величины τ символом p_x . Тогда мы имеем для всех $t > T_0$ и для всех x

$$\begin{aligned} |w(t, x) - c| &= \left| \mathbb{E}_x \mathbf{1}_{\{\tau > \log t\}} f(y_t) + \int_0^{\log t} p_x(\theta) \mathbb{E}_{x_0} f(x_{t-\theta}) d\theta - c \right| \\ &\leq (\|f\| + c) P_x\{\tau > \log t\} + \int_0^{\log t} p_x(\theta) |w(t - \theta, x_0) - c| d\theta < \varepsilon, \end{aligned}$$

что влечет равномерность сходимости $w(t, x) \rightarrow c$ при $t \rightarrow \infty$.

2) Пользуясь предыдущим утверждением, мы имеем

$$\partial_t w(t, x) = (Le^{tL} f)(x) = (e^{tL} Lf)(x) \rightarrow c'$$

равномерно по x . Так как кроме этого выполняется также $w(t, x) \rightarrow c$, мы получаем $c' = 0$. После умножения на $2\varphi^2$ уравнение (4) переписывается в виде $\nabla(\varphi^2 \nabla w) = 2\varphi^2 \partial_t w$. Следовательно,

$$\nabla w(t, x) = c(t)\varphi^{-2}(x) + 2\varphi^{-2}(x) \int_{x_0}^x \varphi^2(y) \partial_t w(t, y) dy,$$

где $c(t)$ – некоторая функция. Используя дополнительное условие периодичности

$$\int_M \nabla w(t, x) dx = 0$$

для каждого t , ограниченность функции φ и ее отделенность от нуля, а также равномерную сходимость $\partial_t w(t, y) \rightarrow 0$, мы получаем $c(t) \rightarrow 0$ и $\nabla w(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x .

3) Это утверждение следует из двух предыдущих.

ТЕОРЕМА 2. Семейство поперстных мер $\mathbb{S}_T$ при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится к закону распределения броуновского движения со сносом (y_t) , которое является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy_t = db_t + \nabla \log \varphi(y_t) dt \quad (5)$$

с начальным условием $y_0 = a_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 для каждого $T > 0$ случайный процесс (y_t^T) , соответствующий мере $\mathbb{S}_T$, является решением уравнения (1). Покажем, что коэффициенты уравнения (1) сходятся к коэффициентам уравнения (5) в том смысле, в каком это требуется в условиях теоремы 11.1.4 из [6]. Согласно леммам 2 и 3 мы получаем

$$\nabla \log u(t, x) = \frac{\nabla[e^{ct} \varphi(x) w(t, x)]}{e^{ct} \varphi(x) w(t, x)} = \nabla \log \varphi(x) + \nabla \log w(t, x) \rightarrow \nabla \log \varphi(x)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по x . Следовательно, функция $\nabla \log u(t, x)$ равномерно ограничена для всех t и x . Далее, для каждого $T_0 > 0$ выполняется

$$\int_0^{T_0} \sup_{x \in M} |\nabla \log u(T-t, x) - \nabla \log \varphi(x)| dt = \int_{T-T_0}^T \sup_{x \in M} |\nabla \log w(t, x)| dt \rightarrow 0.$$

Таким образом, оба условия теоремы 11.1.4 из [6] выполнены и, следовательно, $\mathbb{S}_T \rightarrow \mathcal{L}(y)$ в смысле слабой сходимости.

Автор выражает глубокую благодарность профессору О. Г. Смолянову за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смолянов О. Г. // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 4. С. 455–458.
2. Sidorova N. A., Smolyanov O. G., von Weizsäcker H., Wittich O. // J. Funct. Anal. 2004. V. 206. № 2. P. 391–413.
3. Pinsky R. G. Second order elliptic operators with periodic coefficients: criticality theory, perturbations, and positive harmonic functions // J. Funct. Anal. 1995. V. 129. P. 80–107.
4. Agmon S. On positive solutions of elliptic equations with periodic coefficients in $\mathbb{R}^n$, spectral results and extensions to elliptic operators on Riemannian manifolds // Differential Equations. Birmingham, 1983.
5. Хасьминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений параболических уравнений // Теор. вероятн. и ее примен. 1960. Т. 5. № 2. С. 179–196.
6. Stroock D. W., Varadhan R. S. R. Multidimensional Diffusion Processes. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1979.