Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, О восстановлении несамосопряженных дифференциальных систем на полуоси по матрице Вейля, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:52:35

О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПОЛУОСИ ПО МАТРИЦЕ ВЕЙЛЯ

В. А. Юрко

1. В статье исследуется обратная спектральная задача для следующей системы дифференциальных уравнений на полуоси:

$$\ell Y(x) := Q_0 Y'(x) + Q(x)Y(x) = \rho Y(x), \quad x > 0. \quad (1)$$

Здесь $Y = [y_k]_{k=\overline{1, n}}^T$ – вектор-столбец (T – знак транспонирования), ρ – спектральный параметр, $Q_0 = \text{diag}[q_k]_{k=\overline{1, n}}$, $Q(x) = [q_{kj}(x)]_{k, j=\overline{1, n}}$, где $q_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$ – комплексные числа, $q_{kk}(x) \equiv 0$, а функции $q_{kj}(x)$, $k \neq j$, являются комплексно-значными, абсолютно непрерывными и $q_{kj}^{(\nu)}(x) \in L(0, \infty)$, $\nu = 0, 1$. Матрица $Q(x)$ называется *потенциалом*.

Обратные задачи спектрального анализа состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто встречаются в математике, механике, физике, электронике, геофизике, метеорологии и других областях естествознания и техники. Обратные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в различных постановках исследовались многими авторами. Большинство работ посвящено обратным задачам для систем Дирака, AKNS и их обобщениям на случай произвольного $n > 2$ (см. [1]–[3] и литературу в них). Основным инструментом исследования здесь является метод оператора преобразования, и полученные результаты в основном аналогичны результатам для оператора Штурма–Лиувилля [4]–[6]. Однако для систем (1) общего вида с произвольными комплексными q_k и интегрируемой $Q(x)$ обратная задача оказывается существенно более трудной для исследования. Операторы преобразования в общем случае имеют весьма сложную структуру, что затрудняет их применение при решении обратной задачи. Исключение составляет случай аналитического потенциала, когда операторы преобразования имеют такой же “треугольный” вид, как и для систем Дирака и AKNS. Этот частный случай изучался в [7]. Исследованию обратных задач для систем (1) общего вида с произвольными комплексными q_k посвящено немного работ, причем в основном эти работы посвящены случаю оси. Отметим важные работы [8], [9], в которых с использованием задачи Римана для аналитических функций изучалась обратная задача рассеяния для системы (1) на оси. Обратная задача для системы (1) на полуоси и на конечном интервале в общем случае еще не исследовалась.

В данной статье исследуется обратная задача для системы (1) на полуоси при произвольных комплексных q_k и при произвольном поведении спектра. В качестве основной спектральной характеристики вводится и изучается так называемая матрица Вейля, которая является аналогом классической функции Вейля для оператора Штурма–Лиувилля и матрицы Вейля, введенной в [10] для дифференциальных операторов высших порядков. Основным методом исследования является метод спектральных отображений [11], [12]. Развивая идеи этого метода применительно к системам вида (1) и используя выявленные аналитические и структурные свойства матрицы Вейля, мы доказываем теорему единственности решения обратной задачи по матрице Вейля и получаем конструктивную процедуру ее решения.

Обозначим $\beta_k = 1/q_k$. Пусть для определенности $\beta_k \neq \beta_j$ при $k \neq j$. Известно, что ρ -плоскость можно разбить на сектора

$$S_j = \{\rho: \arg \rho \in (\theta_j, \theta_{j+1})\}, \quad j = \overline{0, 2r-1}, \quad 0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{2r-1} < 2\pi,$$

в каждом из которых существует перестановка $i_k = i_k(S_j)$ чисел $1, \dots, n$ такая, что для чисел $R_k = R_k(S_j)$ вида $R_k = \beta_{i_k}$ имеем

$$\text{Re}(\rho R_1) < \dots < \text{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S_j. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования, грант № Е02-1.0-186, гранта “Университеты России”, грант № УР.04.01.042, и РФФИ, грант № 04-01-00007.

Отметим, что число $2r$ секторов S_j зависит от расположения чисел $\{\beta_k\}_{k=\overline{1,n}}$ на комплексной плоскости, причем $1 \leq r \leq n(n-1)/2$. Пусть дана матрица $h = [h_{\xi\nu}]_{\xi, \nu=\overline{1,n}}$, $\det h \neq 0$, где $h_{\xi\nu}$ – комплексные числа. Введем линейные формы $U(Y) = [U_\xi(Y)]_{\xi=\overline{1,n}}^T$ по формуле $U(Y) = hY(0)$, т.е. $U_\xi(Y) = [h_{\xi 1}, \dots, h_{\xi n}]Y(0)$. Обозначим $\Omega_{mk}^0(j_1, \dots, j_m) = \det[h_{\xi, j_\nu}]_{\xi=\overline{1, m-1}, k; \nu=\overline{1, m}}$. Предположим, что

$$\Omega_{mm}^0(i_1, \dots, i_m) \neq 0, \quad m = \overline{1, n-1}, \quad (3)$$

где $i_k = i_k(S_j)$ – вышеупомянутая перестановка для сектора S_j , $j = \overline{0, 2r-1}$. Условие (3) называется *условием информативности* для пары $L = (\ell, U)$. Системы, которые не удовлетворяют условию информативности, обладают качественно другими закономерностями при постановке и исследовании обратных задач и в данной работе не рассматриваются. Без ограничения общности считаем, что выполняются следующие условия нормировки: $\det h = 1$ и для некоторого фиксированного сектора (для определенности для сектора S_0) имеем $\Omega_{mm}^0(i_1, \dots, i_m) = 1$, $m = \overline{1, n-1}$. Везде в дальнейшем будем считать, что условия информативности и нормировки выполнены.

Пусть вектор-функции

$$\Phi_m(x, \rho) = [\Phi_{km}(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}^T, \quad m = \overline{1, n},$$

являются решениями системы (1) при условиях $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, а также $\Phi_m(x, \rho) = O(\exp(\rho R_m x))$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in S_j$ в каждом секторе S_j со свойством (2). Эти условия однозначно определяют решения $\Phi_m(x, \rho)$. Положим $M_{m\xi}(\rho) = U_\xi(\Phi_m)$, $\xi > m$, $M(\rho) = [M_{m\xi}(\rho)]_{m, \xi=\overline{1, n}}$, $M_{m\xi}(\rho) = \delta_{\xi m}$ при $\xi \leq m$, $\Phi(x, \rho) = [\Phi_1(x, \rho), \dots, \Phi_n(x, \rho)] = [\Phi_{km}(x, \rho)]_{k, m=\overline{1, n}}$. Функции $\Phi_m(x, \rho)$ и $M_{m\xi}(\rho)$ называются *решениями Вейля* и *функциями Вейля* соответственно. Матрица $M(\rho)$ называется *матрицей Вейля* или *спектром* $L = (\ell, U)$.

ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ. Фиксируем Q_0 , т.е. числа $\beta_k = 1/q_k$, $k = \overline{1, n}$, известны и фиксированы. Обратная задача ставится следующим образом: по заданной матрице Вейля $M(\rho)$ построить пару $L = (\ell, U)$.

2. Обозначим

$$\Gamma_j = \{\rho: \arg \rho = \theta_j\}, \quad j = \overline{0, 2r-1}, \quad \Gamma_{2r} := \Gamma_0.$$

Разрежем ρ -плоскость вдоль лучей Γ_j и обозначим через $\Gamma_j^\pm = \{\rho: \arg \rho = \theta_j \pm 0\}$ берега разрезов. Положим $\overline{S}_j = S_j \cup \Gamma_j^+ \cup \Gamma_{j+1}^-$ и обозначим

$$\Sigma = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{2r-1} \Gamma_j \right) = \bigcup_{j=0}^{2r-1} S_j$$

– ρ -плоскость без разрезов вдоль лучей Γ_j , и $\overline{\Sigma} = \bigcup_{j=0}^{2r-1} \overline{S}_j$ – замыкание Σ (различаем берега разрезов).

Зафиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. При $\rho \in \Gamma_j$ строгие неравенства в (2) в некоторых местах превращаются в равенства. Пусть $m_i = m_i(j)$, $p_i = p_i(j)$, $i = \overline{1, s}$, таковы, что при $\rho \in \Gamma_j$ выполнено

$$\operatorname{Re}(\rho R_{m_i-1}) < \operatorname{Re}(\rho R_{m_i}) = \dots = \operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i}) < \operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i+1}), \quad i = \overline{1, s},$$

где $R_k = R_k(S_j)$. Положим

$$N_j := \{m: m = \overline{m_1, m_1 + p_1 - 1}, \dots, \overline{m_s, m_s + p_s - 1}\},$$

$J_m := \{j: m \in N_j\}$, $\gamma_m = \bigcup_{j \in J_m} \Gamma_j$, и пусть $\Sigma_m = \mathbb{C} \setminus \gamma_m$ – ρ -плоскость без разрезов вдоль лучей из γ_m , а $\overline{\Sigma}_m$ – замыкание Σ_m (различаем берега разрезов). Ясно, что область $\Sigma_m = \bigcup_{\nu} S_{m\nu}$ состоит из секторов $S_{m\nu}$, каждый из которых является объединением нескольких секторов S_j с одним и тем же набором $\{R_\xi\}_{\xi=\overline{1, m}}$. При $\xi = \overline{0, n-2}$ построим функции

$$B_{mk}^\xi(\rho), \quad m = \overline{1, n-\xi-1}, \quad k = \overline{m+\xi+1, n},$$

по следующим рекуррентным формулам:

$$B_{mk}^0(\rho) = M_{mk}(\rho), \quad B_{mk}^\xi(\rho) = B_{mk}^{\xi-1}(\rho) - B_{m, m+\xi}^{\xi-1}(\rho) B_{m+\xi, k}^0(\rho).$$

ТЕОРЕМА 1. Матрица Вейля $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ имеет следующие свойства.

- 1) Имеет место равенство $M_{mk}(\rho) = \delta_{mk}$ при $k \leq m$.
- 2) Функции Вейля $M_{mk}(\rho)$, $k > m$, являются аналитическими в Σ_m за исключением не более чем счетного ограниченного множества Λ'_m полюсов и непрерывны в $\overline{\Sigma}_m$ (т.е. они непрерывны в каждом секторе $\overline{S}_{m\nu}$) за исключением ограниченного множества Λ_m . Точнее, при $j \in J_m$, $\rho \in \Gamma_j \setminus \Lambda_m$ существуют конечные пределы

$$M_{mk}^{\pm}(\rho) = \lim M_{mk}(z), \quad z \rightarrow \rho, \quad z \in \Sigma_m, \quad \pm(\arg z - \theta_j) > 0.$$

На γ_m функции $M_{mk}(\rho)$ имеют разрез.

- 3) При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S}_j$ имеет место асимптотическое равенство

$$M_{mk}(\rho) = \mu_{mk}^0(S_j) + O(\rho^{-1}), \quad (4)$$

где

$$\mu_{mk}^0(S_j) = \frac{\Omega_{mk}^0(i_1, \dots, i_m)}{\Omega_{m,m}^0(i_1, \dots, i_m)}, \quad i_k = i_k(S_j). \quad (5)$$

- 4) Функции $B_{\nu k}^{m-\nu}(\rho)$ являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'_m$ при $j \notin J_m$, $1 \leq \nu \leq m \leq n-1$, $m+1 \leq k \leq n$.

Доказательства этой и последующих теорем см. в [13]. Обозначим

$$\Lambda = \bigcup_m \Lambda_m, \quad h^* = [h_{k\xi}^*]_{k,\xi=\overline{1,n}} := Q_0 h^{-1}, \quad R_m^* := -R_{n-m+1}.$$

Рассмотрим дифференциальную систему и линейные формы $L^* = (\ell^*, U^*)$:

$$\ell^* Z(x) := -Z'(x)Q_0 + Z(x)Q(x) = \rho Z(x), \quad U^*(Z) = Z(0)h^*, \quad (6)$$

где $Z = [z_k]_{k=\overline{1,n}}$ – вектор-строка. Тогда $U^*(Z) = [U_n^*(Z), \dots, U_1^*(Z)]$, где $U_{n-\xi+1}^*(Z) = Z(0)[h_{k\xi}^*]_{k=\overline{1,n}}^T$. Пусть вектор-функции $\Phi_m^*(x, \rho) = [\Phi_{km}^*(x, \rho)]_{k=\overline{1,n}}$, $m = \overline{1,n}$ являются решениями (6) при условиях $U_{\xi}^*(\Phi_m^*) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1,m}$, а также $\Phi_m^*(x, \rho) = O(\exp(\rho R_m^* x))$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in S_j$ в каждом секторе $\overline{S}_j$ со свойством (2). Положим

$$\Phi^*(x, \rho) = [\Phi_{n-m+1}^*(x, \rho)]_{m=\overline{1,n}}^T = [\Phi_{n-m+1,k}^*(x, \rho)]_{m,k=\overline{1,n}}, \\ M_{mk}^*(\rho) = U_k(\Phi_m^*), \quad M^*(\rho) = [M_{n-\xi+1,n-k+1}^*(\rho)]_{k,\xi=\overline{1,n}}.$$

Можно доказать, что $M^*(\rho) = M^{-1}(\rho)$.

3. Наряду с $L = (\ell, U)$ рассмотрим пару $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ того же вида, но с другими матрицами $\tilde{Q}$, $\tilde{h}$ (напомним, что матрица Q_0 известна априори и фиксирована). Везде в дальнейшем считаем, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$, и $\hat{\alpha} := \alpha - \tilde{\alpha}$. Приведем теперь теорему единственности решения обратной задачи восстановления L по матрице Вейля.

ТЕОРЕМА 2. Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание матрицы Вейля $M(\rho)$ однозначно определяет потенциал $Q(x)$ и матрицу h .

СЛЕДСТВИЕ 1. Задание чисел $\mu_{mk}^0(S_j)$ вида (5) при всех m, k, j однозначно определяет матрицу линейных форм $h = [h_{\xi\nu}]_{\xi,\nu=\overline{1,n}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $Q(x) \equiv 0$, то $M_{mk}(\rho) \equiv \mu_{mk}^0(S_j)$, $\rho \in \overline{S}_j$, при всех m, k, j , и наше утверждение следует из теоремы 2.

4. Центральную роль при решении обратной задачи играет здесь так называемое *основное уравнение* обратной задачи, которое является линейным особым интегральным уравнением (см. (8)). Доказана однозначная разрешимость основного уравнения в соответствующем банаховом пространстве. Опираясь на решение основного уравнения, мы получаем конструктивную процедуру решения обратной задачи восстановления L по заданной матрице Вейля.

Пусть пара $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ выбрана так, что

$$\widehat{M}(\rho) = O(\rho^{-1}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

т.е. $\mu_{mk}^0(S_j) = \tilde{\mu}_{mk}^0(S_j)$ при всех m, k, j . Согласно (4) и следствию 1 условие (7) равносильно условию $h = \tilde{h}$. Например, можно взять $\tilde{Q}(x) \equiv 0$.

В ρ -плоскости рассмотрим контур $\omega = \omega^0 \cup \omega^+ \cup \omega^-$ (с обходом против часовой стрелки), где ω^0 – ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda \cup \tilde{\Lambda} \cup \{0\}$ (т.е. $\Lambda \cup \tilde{\Lambda} \cup \{0\} \subset \text{int } \omega^0$), и

$$\omega^\pm = \bigcup_{j=0}^{2r-1} \omega_j^\pm, \quad \omega_j^\pm = \Gamma_j^\pm \setminus \text{int } \omega^0.$$

Определим матрицы $A(\rho) = [a_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ и $\tilde{A}(\rho) = [\tilde{a}_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ по формулам

$$A(\rho) = \mathcal{N}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho), \quad \tilde{A}(\rho) = \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho), \quad \text{где } \mathcal{N}(\rho) = (M(\rho))^T, \quad \mathcal{N}^*(\rho) = (M^*(\rho))^T.$$

Ясно, что, $a_{mk}(\rho) = 0, \tilde{a}_{mk}(\rho) = 0$ при $m \leq k$, а при $m > k$ имеем

$$a_{mk}(\rho) = \sum_{\xi=k+1}^m M_{n-m+1, n-\xi+1}^*(\rho) \widehat{M}_{k\xi}(\rho), \quad \tilde{a}_{mk}(\rho) = \sum_{\xi=k+1}^m \tilde{M}_{n-m+1, n-\xi+1}^*(\rho) \widehat{M}_{k\xi}(\rho).$$

Фиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. Пусть

$$N_j = \{\overline{m_1, m_1 + p_1 - 1}, \dots, \overline{m_s, m_s + p_s - 1}\}, \quad m_i - 1, m_i + p_i \notin N_j, \quad i = \overline{1, s}.$$

Рассмотрим матрицы

$$A^{(j)}(\rho) = [a_{k\xi}^{(j)}(\rho)]_{k,\xi=\overline{1,n}}, \quad \tilde{A}^{(j)}(\rho) = [\tilde{a}_{k\xi}^{(j)}(\rho)]_{k,\xi=\overline{1,n}}, \quad \rho \in \Gamma_j^\pm,$$

где $a_{k\xi}^{(j)}(\rho) = a_{k\xi}(\rho), \tilde{a}_{k\xi}^{(j)}(\rho) = \tilde{a}_{k\xi}(\rho)$ при $m_i \leq \xi < k \leq m_i + p_i, i = \overline{1, s}$, и $a_{k\xi}^{(j)}(\rho) = \tilde{a}_{k\xi}^{(j)}(\rho) = 0$ в остальных случаях. При $\rho \in \omega$ введем матрицы $A_0(\rho)$ и $\tilde{A}_0(\rho)$ по формулам

$$A_0(\rho) = \begin{cases} A^{(j)}(\rho), & \rho \in \omega_j^\pm, \\ A(\rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases} \quad \tilde{A}_0(\rho) = \begin{cases} \tilde{A}^{(j)}(\rho), & \rho \in \omega_j^\pm, \\ \tilde{A}(\rho), & \rho \in \omega^0. \end{cases}$$

В контуре ω удобно склеить берега разрезов. Поэтому в ρ -плоскости мы рассмотрим контур

$$\omega^* := \omega^0 \cup \omega^1, \quad \text{где } \omega^1 = \bigcup_{j=0}^{2r-1} \omega_j^1, \quad \omega_j^1 := \{\rho: \rho \in \Gamma_j \setminus \omega^0\}$$

(с ориентацией в сторону возрастания модуля ρ). При $\rho \in \omega^*$ определим матрицы $\varphi(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{G}(x, \rho), \tilde{S}(\rho)$ и $\tilde{r}(x, \mu, \rho)$ по формулам

$$\varphi(x, \rho) = \begin{cases} [\Phi^+(x, \rho), \Phi^-(x, \rho)], & \rho \in \omega^1, \\ \Phi(x, \rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}(x, \rho) = \begin{cases} [\tilde{\Phi}^+(x, \rho), \tilde{\Phi}^-(x, \rho)], & \rho \in \omega^1, \\ \tilde{\Phi}(x, \rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases}$$

$$\tilde{G}(x, \rho) = \begin{bmatrix} -(A_0(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho))^+ Q_0 \\ (A_0(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho))^- Q_0 \end{bmatrix}, \quad \rho \in \omega^1, \quad \tilde{G}(x, \rho) = A_0(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) Q_0, \quad \rho \in \omega^0,$$

$$\tilde{S}(\rho) = \begin{bmatrix} E - \frac{1}{2} A_0^+(\rho) & \frac{1}{2} (A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho)^+ \tilde{\mathcal{N}}^-(\rho)) \\ \frac{1}{2} (A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- \tilde{\mathcal{N}}^+(\rho) & E - \frac{1}{2} A_0^-(\rho) \end{bmatrix}, \quad \rho \in \omega^1, \quad f^\pm := f|_{\omega^\pm},$$

$$\tilde{S}(\rho) = E - \frac{1}{2} A_0(\rho), \quad \rho \in \omega^0, \quad \tilde{r}(x, \mu, \rho) = \frac{\tilde{G}(x, \mu) \tilde{\varphi}(x, \rho)}{\mu - \rho}, \quad \rho, \mu \in \omega^*.$$

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо соотношение*

$$\tilde{\varphi}(x, \rho) = \varphi(x, \rho) \tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \varphi(x, \mu) \tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu, \quad \rho \in \omega^*. \quad (8)$$

При каждом фиксированном $x \geq 0$ соотношение (8) является линейным интегральным уравнением относительно $\varphi(x, \rho)$. Соотношение (8) называется *основным уравнением* обратной задачи. Исследуем разрешимость основного уравнения (8). Для этого введем банахово пространство

$$\mathcal{B}_p := \{f(\rho) : f(\rho)\rho^{-1} \in L_p(\omega^*)\}, \quad p > 1,$$

с нормой $\|f\|_{\mathcal{B}_p} := \|f(\rho)\rho^{-1}\|_{L_p(\omega^*)}$. Определим матрицу $D(x, \rho)$, $\rho \in \omega^*$, $x \geq 0$, следующим образом: при $\rho \in \omega^0$ $D(x, \rho) = \text{diag}[D_k(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}$, $D_k(x, \rho) = \exp(-\rho R_k x)$, $R_k = R_k(S_j)$; при $\rho \in \omega_j^1$ $D(x, \rho) = \text{diag}[D_k(x, \rho)]_{k=\overline{1, 2n}}$, $D_k(x, \rho) = \exp(-\rho R_k x)$ для $k \leq n$, и $D_k(x, \rho) = \exp(-\rho R_{k-n} x)$ для $k > n$; $R_k = R_k(S_j)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M(\rho)$ – матрица Вейля для пары $L = (\ell, U)$. Пусть пара $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ выбрана так, чтобы выполнялось (7). Тогда при каждом фиксированном $x \geq 0$, основное уравнение (8) имеет единственное решение $\varphi(x, \rho)$ в классе $\varphi(x, \rho)D(x, \rho) \in \mathcal{B}_p$ при каждом $p > 1$ и $\sup_{x \geq 0} \|\varphi(x, \rho)D(x, \rho)\|_{\mathcal{B}_p} < \infty$.

Приведем теперь явные формулы для построения потенциала $Q(x)$. Обозначим

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} (\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 - Q_0 \Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu)) d\mu. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 5. *Справедливы соотношения*

$$Q(x) = \tilde{Q}(x) + \varepsilon(x), \quad h = \tilde{h}. \quad (10)$$

Таким образом, получаем следующую *процедуру* решения обратной задачи. Пусть задана матрица Вейля $M(\rho)$ пары $L = (\ell, U)$.

- 1) Выберем “модельную” пару $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ так, чтобы выполнялось (7).
- 2) Построим матрицы-функции $\tilde{\varphi}(x, \rho)$, $\tilde{S}(\rho)$, $\tilde{r}(x, \mu, \rho)$, $x \geq 0$, $\mu, \rho \in \omega^*$.
- 3) Решая основное уравнение (8), находим $\varphi(x, \rho)$ при $x \geq 0$, $\rho \in \omega^*$, т.е. находим $\Phi(x, \rho)$ при $x \geq 0$, $\rho \in \omega$.
- 4) Вычисляем матрицу-функцию $\varepsilon(x)$ по формуле (9).
- 5) Строим пару $L = (\ell, U)$ по формуле (10).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
2. Sakhnovich L. A. Spectral Theory of Canonical Differential Systems. Method of Operator Identities. Operator Theory: Adv. and Appl. V. 107. Basel: Birkhäuser Verlag, 1999.
3. Шабат А. Б. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1824–1834.
4. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
5. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
6. Freiling G., Yurko V. A. Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications. New York: NOVA Science Publishers, 2001.
7. Маламуд М. М. // Тр. ММО. 1999. Т. 60. С. 199–258.
8. Beals R., Coifman R. R. // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 39–90.
9. Zhou X. // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42. P. 895–938.
10. Юрко В. А. // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 431–456.
11. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
12. Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратовского пединститута, 2001.
13. Yurko V. A. An inverse problem of spectral analysis for systems of differential equations on the half-line. Schriftenreihe des Instituts für Mathematik, SM-DU-556: Universität Duisburg-Essen, 2003.