Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Гонцов, О порядках нулей многочлена на траектории решения системы линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 473–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 02:38:11

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ПОРЯДКАХ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНА НА ТРАЕКТОРИИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Р. Р. Гонцов

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \quad (1)$$

из p линейных мероморфных дифференциальных уравнений, заданную на сфере Римана и имеющую регулярные особенности в точках $a_1, \dots, a_n$ (т.е. такие особенности, в секториальной окрестности которых любое решение системы имеет не более чем степенной рост). Если обозначить через $r_1, \dots, r_n$ ранги Пуанкаре системы в особых точках, то разложение матрицы $B(z)$ в ряд Лорана в окрестности каждой особенности $a_i \neq \infty$ будет иметь вид

$$B(z) = \frac{B_{-r_i-1}^i}{(z-a_i)^{r_i+1}} + \dots + \frac{B_{-1}^i}{z-a_i} + B_0^i + \dots, \quad B_{-r_i-1}^i \neq 0$$

(если $a_i = \infty$, то главная часть матрицы $B(z)$ в окрестности бесконечности – многочлен степени $r_i - 1$).

В пространстве решений системы (1), рассмотренной в окрестности особой точки a_i , существует базис (называемый левелевским), элементы которого образуют фундаментальную матрицу $Y_i(z)$, представимую в виде

$$Y_i(z) = U_i(z)(z-a_i)^{A_i}(z-a_i)^{E_i},$$

где $U_i(z)$ – голоморфная в окрестности точки a_i матрица, $A_i = \text{diag}(\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^p)$ – целочисленная матрица нормирований с условием $\varphi_i^1 \geq \dots \geq \varphi_i^p$, $E_i = (1/2\pi i) \ln G_i$ (здесь i в знаменателе коэффициента $1/2\pi i$ – это мнимая единица), G_i – верхнетреугольная матрица монодромии системы в точке a_i и собственные значения ρ_i^j матрицы E_i удовлетворяют условию

$$0 \leq \text{Re } \rho_i^j < 1, \quad j = 1, \dots, p$$

(подробнее описание нормирований, монодромии и левелевского базиса см. в [1]). Собственные значения $\beta_i^j = \varphi_i^j + \rho_i^j$ матрицы $A_i + E_i$ называются *левелевскими показателями* системы в точке a_i . Из такого разложения для фундаментальной матрицы следует, что любая компонента $y^j(z)$ произвольного решения $y(z) = (y^1(z), \dots, y^p(z))$ системы (1) в окрестности особой точки a_i может быть представлена в виде конечной суммы

$$y^j(z) = \sum_{k,l} h_{kl}(z)(z-a_i)^{\rho_i^k} \ln^{b_l}(z-a_i), \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Минпромнауки, грант № НПП-457.2003.01, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-22000-НЦНИ-а.

где $h_{kl}(z)$ – мероморфные в точке a_i функции, b_l – целые неотрицательные числа и все пары (ρ_i^k, b_l) различны.

Ввиду такого представления функции $y^j(z)$ ее порядок в особой точке a_i определяется как

$$\text{ord}_{a_i} y^j(z) = \min_{k,l} (\text{ord}_{a_i} h_{kl}(z) + \text{Re } \rho_i^k).$$

Если же z_0 не входит в число особых точек системы (1), то $\text{ord}_{z_0} y^j(z)$ – это порядок нуля голоморфной функции.

Рассмотрим некоторую фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (1) и ее элемент $y_{\alpha\beta}(z)$, не равный тождественно нулю. Пусть $\Sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j$ – сумма показателей системы (1) по всем особым точкам. А. А. Болибрухом [2] было показано, что

$$\text{ord}_{z_0} y_{\alpha\beta}(z) \leq \frac{(n-2)p(p-1)}{2} - \Sigma + T, \quad (3)$$

где $T = \max_j \text{Re } \beta_i^j$, если $z_0 = a_i$, и $T = p-1$, если z_0 не входит в число особых точек системы (1) (Σ всегда является целым числом). Вообще говоря, функция $y_{\alpha\beta}(z)$ многозначна, поэтому под порядком нуля в неособой точке z_0 понимается порядок некоторой выделенной в окрестности z_0 голоморфной ветви этой функции.

Воспользуемся следующей оценкой величины Σ из [3]:

$$\Sigma \geq -\frac{p(p-1)}{2}R + \sum_{i=1}^n \frac{k_i(k_i-1)}{2},$$

где $R = \sum_{i=1}^n r_i$, $k_i = \dim \ker B_{-r_i-1}^i$ (если $r_i = 0$, то k_i полагается равным нулю). Тогда из неравенства (3) следует, что

$$\text{ord}_{z_0} y_{\alpha\beta}(z) \leq \frac{(n-2+R)p(p-1)}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{k_i(k_i-1)}{2} + T, \quad (4)$$

где $T = \max_j \text{Re } \beta_i^j$, если $z_0 = a_i$, и $T = p-1$, если z_0 не входит в число особых точек системы (1).

Следуя идее, изложенной Болибрухом в [2], с помощью неравенства (4) оценим порядок в произвольной точке сферы Римана однородного многочлена $P_l(x_1, \dots, x_p)$ степени l , рассмотренного на траектории решения $y(z) = (y^1(z), \dots, y^p(z))$ системы (1). При этом для функции $P_l(y^1(z), \dots, y^p(z))$ справедливо представление вида (2) в окрестности особой точки a_i , и величина

$$\text{ord}_{a_i} P_l(y^1(z), \dots, y^p(z))$$

определяется так же, как и для всякой функции такого вида.

Рассмотрим систему с фундаментальной матрицей $\tilde{Y}_l(z) = Y(z) \otimes \dots \otimes Y(z)$ – l -й тензорной степенью матрицы $Y(z)$. Напомним, что если $A = (a_{ij})$ и B – квадратные матрицы размера p , то их тензорное произведение $A \otimes B$ определяется формулой

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}B & \dots & a_{pp}B \end{pmatrix}$$

и является квадратной матрицей размера p^2 . Если данные матрицы рассматривать как матрицы линейных операторов A и B в базисе $\{v_1, \dots, v_p\}$ p -мерного векторного пространства V , то матрица определенного выше тензорного произведения будет матрицей оператора $A \otimes B$ в базисе $\{v_i \otimes v_j\}$ (при соответствующем упорядочении элементов) p^2 -мерного векторного пространства $V \otimes V$ (оператор $A \otimes B$ действует по формуле $A \otimes B(u \otimes v) = A(u) \otimes B(v)$, $u, v \in V$; подробнее о тензорном произведении векторных пространств и операторов можно найти в [4]).

Фундаментальная матрица $\tilde{Y}_l(z)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Y}_l}{dz} &= \frac{dY}{dz} \otimes Y \otimes \cdots \otimes Y + \cdots + Y \otimes \cdots \otimes Y \otimes \frac{dY}{dz} \\ &= (B(z) \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes \cdots \otimes I \otimes B(z)) \tilde{Y}_l \end{aligned}$$

с матрицей коэффициентов

$$\tilde{B}(z) = B(z) \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes \cdots \otimes I \otimes B(z).$$

Далее определим l -ю симметрическую тензорную степень матрицы $Y(z)$ – матрицу $\tilde{Y}_l^{\text{sym}}$. Пусть V – комплексное векторное пространство размерности p с фиксированным базисом $v_1, \dots, v_p$. Тогда $\tilde{V} = V \otimes \cdots \otimes V$ (l раз) – векторное пространство размерности p^l (элементы которого также называются тензорами) с базисом $\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_l}\}_{i_1, \dots, i_l}$, а $\tilde{V}^{\text{sym}} \subset \tilde{V}$ – подпространство симметрических тензоров с базисом $\{\frac{1}{l!} \sum_{\sigma} v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{\sigma(l)}}\}_{i_1 \leq \dots \leq i_l}$ (сумма берется по всем перестановкам чисел $1, \dots, l$). Размерность $\tilde{V}^{\text{sym}}$ равна

$$d(p, l) = C_{p+l-1}^l$$

– числу сочетаний из p по l с повторениями. При каждом z матрицу $\tilde{Y}_l(z)$ можно рассматривать как матрицу линейного отображения пространства $\tilde{V}$, переводящего подпространство $\tilde{V}^{\text{sym}}$ в себя. Матрица ограничения этого отображения на $\tilde{V}^{\text{sym}}$ и будет матрицей $\tilde{Y}_l^{\text{sym}}$. Аналогично, по матрице $\tilde{B}(z)$, при каждом z переводящей $\tilde{V}^{\text{sym}}$ в себя, определяется матрица $\tilde{B}^{\text{sym}}$, при этом

$$\frac{dy}{dz} = \tilde{B}^{\text{sym}}(z)y \quad (5)$$

– система размера $d(p, l)$ с фундаментальной матрицей $\tilde{Y}_l^{\text{sym}}$. Особые точки системы (5) те же, что и у системы (1), ранги Пуанкаре в них не превосходят соответствующих рангов Пуанкаре системы (1), а показатели в особых точках суть l -суммы показателей системы (1), взятых со всевозможными повторениями (т.е. показателями в особой точке a_i являются числа вида $m_1\beta_i^1 + \cdots + m_p\beta_i^p$, где $m_1, \dots, m_p$ – неотрицательные целые и $m_1 + \cdots + m_p = l$). Если обозначить через $\tilde{B}_i$ старший коэффициент матрицы $\tilde{B}(z)$ в ее разложении в ряд Лорана в окрестности особенности a_i , т.е.

$$\tilde{B}_i = B_{-r_i-1}^i \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \cdots + I \otimes \cdots \otimes I \otimes B_{-r_i-1}^i, \quad (6)$$

то соответствующим старшим коэффициентом матрицы $\tilde{B}^{\text{sym}}(z)$ будет матрица ограничения линейного оператора, задаваемого матрицей $\tilde{B}_i$, на подпространство $\tilde{V}^{\text{sym}}$:

$$\tilde{B}_i^{\text{sym}} = \tilde{B}_i|_{\tilde{V}^{\text{sym}}}.$$

Из построения матрицы $\tilde{Y}_l^{\text{sym}}$ видно, что все возможные мономы степени l от элементов любого столбца матрицы $Y(z)$ составляют один из столбцов матрицы $\tilde{Y}_l^{\text{sym}}$. Поэтому значение произвольного однородного многочлена $P_l(x_1, \dots, x_p)$ степени l на траектории любого решения системы (1) совпадает с одним из элементов матрицы $S_1 \tilde{Y}_l^{\text{sym}} S_2$ при подходящем выборе невырожденных постоянных матриц S_1 и S_2 . Система с фундаментальной матрицей $S_1 \tilde{Y}_l^{\text{sym}} S_2$ имеет те же показатели и ранги Пуанкаре, что и система (5), а ее матрицей коэффициентов будет матрица $S_1 \tilde{B}^{\text{sym}}(z) S_1^{-1}$, имеющая в окрестности особой точки a_i вид

$$S_1 \tilde{B}^{\text{sym}}(z) S_1^{-1} = \frac{S_1 \tilde{B}_i^{\text{sym}} S_1^{-1}}{(z - a_i)^{r_i+1}} + \cdots.$$

И теперь, чтобы воспользоваться неравенством (4) для оценки порядка в произвольной точке сферы Римана многочлена $P_l(x_1, \dots, x_p)$, рассмотренного на траектории решения системы (1), остается оценить величину $\dim \ker \tilde{B}_i^{\text{sym}}$.

Обозначим через W_i подпространство $\ker \tilde{B}_{-r_i-1}^i$ пространства V , через $\tilde{W}_i = W_i \otimes \dots \otimes W_i$ l -ю тензорную степень W_i , а через $\tilde{W}_i^{\text{sym}} \subset \tilde{W}_i$ симметрическую l -ю тензорную степень W_i – пространство размерности $d(k_i, l)$. Заметим, что $\tilde{B}_i(w_{\alpha_1}^i \otimes \dots \otimes w_{\alpha_l}^i) = 0$ для всякого базисного вектора $w_{\alpha_1}^i \otimes \dots \otimes w_{\alpha_l}^i$ пространства $\tilde{W}_i$ (здесь $w_1^i, \dots, w_{k_i}^i$ – фиксированный базис пространства W_i), так как на этом векторе обращается в нуль каждое слагаемое из формулы (6) для оператора $\tilde{B}_i$. Следовательно, $\tilde{W}_i \subset \ker \tilde{B}_i$. А так как $W_i \subset V$, то $\tilde{W}_i^{\text{sym}} \subset \tilde{V}^{\text{sym}}$, и тогда $\tilde{W}_i^{\text{sym}} \subset \tilde{W}_i \cap \tilde{V}^{\text{sym}} \subset \ker \tilde{B}_i \cap \tilde{V}^{\text{sym}} = \ker \tilde{B}_i^{\text{sym}}$.

Таким образом, $\dim \ker \tilde{B}_i^{\text{sym}} \geq \dim \tilde{W}_i^{\text{sym}} = d(k_i, l)$, и мы получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для порядка однородного многочлена $P_l(x_1, \dots, x_p)$ степени l , рассмотренного на траектории решения $y = (y^1, \dots, y^p)$ системы (1), справедлива следующая оценка (в предположении, что функция $P_l(y^1(z), \dots, y^p(z))$ не равна тождественно нулю):

$$\text{ord}_{z_0} P_l(y^1(z), \dots, y^p(z)) \leq \frac{(n-2+R)d(p, l)(d(p, l)-1)}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{d(k_i, l)(d(k_i, l)-1)}{2} + T,$$

где $T = l \max_j \text{Re} \beta_i^j$, если $z_0 = a_i$, и $T = d(p, l) - 1$, если z_0 не входит в число особых точек системы (1).

Далее рассмотрим произвольный многочлен $P(z, x_1, \dots, x_p)$ степени $m > 0$ по z и степени l по $x_1, \dots, x_p$. Пусть $y = (y^1, \dots, y^p)$ – некоторое решение системы (1). Продолжая следовать методу из [2], оценим порядок функции $P(z, y^1(z), \dots, y^p(z))$ в произвольной точке сферы Римана. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений с фундаментальной матрицей $Y_D(z)$, являющейся прямой суммой матриц $1, Y(z), \tilde{Y}_2^{\text{sym}}(z), \dots, \tilde{Y}_l^{\text{sym}}(z)$. Размер этой системы равен числу $D(p, l) = 1 + p + d(p, 2) + \dots + d(p, l)$, ранги Пуанкаре совпадают с рангами Пуанкаре системы (1), а показателями являются 0 и всевозможные t -суммы показателей системы (1), $1 \leq t \leq l$.

Рассмотрим также систему дифференциальных уравнений с фундаментальной матрицей $Z(z) = \text{diag}(1, z, \dots, z^m)$ и матрицей коэффициентов $(1/z) \text{diag}(0, 1, \dots, m)$. Эта система имеет две особые точки -0 и ∞ , нулевые ранги Пуанкаре в них и показатели $(0, 1, \dots, m)$, $(0, -1, \dots, -m)$ соответственно.

Окончательно, рассмотрим систему дифференциальных уравнений с фундаментальной матрицей $Y_{\text{fin}}(z) = Z \otimes Y_D = \text{diag}(Y_D, zY_D, \dots, z^m Y_D)$ размера $(m+1)D(p, l)$ и особыми точками $a_1, \dots, a_n, 0, \infty$ рангов Пуанкаре $r_1, \dots, r_n, 0, 0$ соответственно (для определенности будем считать, что точки 0 и ∞ являются неособыми для исходной системы (1)). Тогда показателями получившейся системы в особых точках $a_1, \dots, a_n$ будут соответствующие показатели системы с фундаментальной матрицей $Y_D(z)$, а в особых точках 0 и ∞ – показатели системы с фундаментальной матрицей $Z(z)$. При этом, если матрица $B_{\text{fin}}(z)$ коэффициентов получившейся системы в окрестности особой точки a_i имеет вид

$$B_{\text{fin}}(z) = \frac{\tilde{B}_{-r_i-1}^i}{(z-a_i)^{r_i+1}} + \dots,$$

то $\dim \ker \tilde{B}_{-r_i-1}^i \geq (m+1)D(k_i, l)$.

Из построения системы с фундаментальной матрицей $Y_{\text{fin}}(z)$ следует, что значение многочлена $P(z, x_1, \dots, x_p)$ рассматриваемого вида на траектории любого решения системы (1) совпадает с одним из элементов матрицы $S_1 Y_{\text{fin}} S_2$ при подходящем выборе невырожденных постоянных матриц S_1 и S_2 . Таким образом, на основании неравенства (4) получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для порядка многочлена $P(z, x_1, \dots, x_p)$ степени $m > 0$ по z и степени l по $x_1, \dots, x_p$, рассмотренного на траектории решения $y = (y^1, \dots, y^p)$ системы (1), справедлива следующая оценка (в предположении, что функция $P(z, y^1(z), \dots, y^p(z))$ не равна тождественно нулю):

$$\text{ord}_{z_0} P(z, y^1(z), \dots, y^p(z)) \leq \frac{(n+R)(m+1)D(p, l)((m+1)D(p, l) - 1)}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{(m+1)D(k_i, l)((m+1)D(k_i, l) - 1)}{2} + T,$$

где $T = \max(0, l \max_j \text{Re } \beta_i^j)$, если $z_0 = a_i$; $T = m$, если $z_0 = 0$; $T = 0$, если $z_0 = \infty$; и $T = (m+1)D(p, l) - 1$, если z_0 не принадлежит множеству $\{a_1, \dots, a_n, 0, \infty\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $m = 0$ для получения соответствующей оценки достаточно ограничиться рассмотрением системы с фундаментальной матрицей $Y_D(z)$.

Оценки из утверждений 1 и 2 являются некоторым уточнением соответствующих оценок, полученных Болибрухом в [2] (уточнение происходит за счет добавления неположительных слагаемых, зависящих от чисел k_i).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем. Тр. МИАН. Т. 206. М.: Наука, 1994.
2. Болибрух А. А. // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 61–65.
3. Гонцов Р. Р. // Изв. АН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 2. С. 39–52.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.