Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Кан-Тэ Ким, Г. Шмальц, Динамика локальных автоморфизмов вложенных CR -многообразий, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:20:07

ДИНАМИКА ЛОКАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ ВЛОЖЕННЫХ CR-МНОГООБРАЗИЙ

Кан-Тэ Ким, Г. Шмальц

Классическая теорема Вонга [1] гласит, что шар является единственной строго псевдовыпуклой ограниченной областью с некомпактной группой автоморфизмов. Эта теорема была обобщена Розеем [2] для ограниченных областей, в которых орбита скапливается в строго псевдовыпуклой точке на границе. Позже Ефимов [3] снял условие ограниченности.

Шён [4] и независимо от него Спиро [5] доказали CR-версию этого результата, в которой также существенно используется строгая псевдовыпуклость точки скопления орбиты.

В этой заметке мы предлагаем две локальные CR-версии этого результата для гиперповерхностей. Эти результаты демонстрируют разное поведение в зависимости от знакоопределенности формы Леви.

Пусть M – вещественно-аналитическая Леви-невырожденная гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$, определенная в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ начала координат. Через $\text{Aut}_0 M$ мы будем обозначать группу локальных автоморфизмов M , т.е. ростков биголоморфизмов, которые локально переводят M в себя и оставляют 0 неподвижным.

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда “The Korea Science and Engineering Foundation”, грант № 1999-2-102-003-5.

Точка $q \neq 0$ (рассмотренная как ее орт $\vec{0}q$) будет называться *сжимаемой*, если существует последовательность локальных автоморфизмов $\Phi_n \in \text{Aut}_0 M$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(q) = 0.$$

Мы будем называть точку q Φ -сжимаемой, если она сжимаема под действием последовательности итераций автоморфизма Φ .

Следующее предложение получается как простое следствие хорошо известного результата Кружилина и Лободы [6] о линеаризации CR-автоморфизмов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M – строго псевдовыпуклая, вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$, определенная в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ начала координат. Если существует сжимаемая точка $q \in \mathcal{U}$, то M локально эквивалентна соприкасающей квадрике

$$\text{Im } w = \langle z, z \rangle.$$

Для доказательства напомним

ТЕОРЕМА 1 (Кружилин–Лобода). Пусть M – строго псевдовыпуклая, вещественно-аналитическая, несферическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$, определенная в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ начала координат. Тогда существуют нормальные координаты с центром в 0 такие, что все автоморфизмы $\Phi \in \text{Aut}_0 M$ принимают вид

$$\begin{pmatrix} z^* \\ w^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},$$

где U – унитарная матрица.

Отсюда немедленно следует, что локальные автоморфизмы образуют компактную группу. Поскольку 0 не принадлежит никакой орбите, содержащей $q \neq 0$, последовательность $\Phi_n(q)$ не может стремиться к 0.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда форма Леви в нуле знакопеременна. Утверждение теоремы 1 в этом случае, вообще говоря, неверно (для формы Леви с лоренцевой сигнатурой аналогичное свойство линеаризуемости было установлено Ежовым [7]). Более того, группа U псевдо-унитарных матриц для знакопеременных эрмитовых форм некомпактна. Однако для индивидуальных автоморфизмов и их итерации имеется следующая теорема Ежова [8].

ТЕОРЕМА 2 (Ежов). Пусть M – вещественно-аналитическая, невырожденная по Леви, несферическая гиперповерхность и $\Phi \in \text{Aut}_0 M$. Тогда существуют нормальные координаты такие, что Φ становится линейным отображением вида

$$z^* = \lambda A z, \quad w^* = (\pm) \lambda^2 w,$$

где A – псевдо-унитарная матрица относительно формы Леви и λ – вещественное число. (Отрицательный знак может появляться только в том случае, когда n четное и сигнатура формы Леви – $(n/2, n/2)$.)

В отличие от псевдовыпуклого случая, абсолютное значение числа $\rho = \pm \lambda^2$ не обязано равняться единице. Это имеет последствия для динамики автоморфизма. Заметим, что число ρ можно определить инвариантным способом как собственное значение индуцированного эндоморфизма

$$d\Phi_0: T_0 M / T_0^{\text{CR}} M \rightarrow T_0 M / T_0^{\text{CR}} M.$$

Мы будем называть Φ *косжимающим*, если $|\rho| < 1$.

Теперь мы можем сформулировать наш результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть M – вещественно-аналитическая, невырожденная по Леви, несферическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$, определенная в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ начала координат. Если существуют некосжимающий автоморфизм $\Phi \in \text{Aut}_0 M$ и Φ -сжимаемая точка q , то $\vec{0q}$ является световым вектором относительно формы Леви и для любого $t \in [0, 1]$ точка $t\vec{q}$ обязана принадлежать M .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть M – вещественно-аналитическая, невырожденная по Леви, несферическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^{n+1}$, $n \geq 1$, определенная в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ начала координат. Если существуют некосжимающий автоморфизм $\Phi \in \text{Aut}_0 M$ и Φ -сжимаемая точка $q \in \mathcal{U} \setminus M$, то M локально эквивалентна квадрике

$$\text{Im } w = \langle z, z \rangle.$$

В доказательстве предложения 2 нам понадобится следующая простая оценка

ЛЕММА 1. Пусть $A = \lambda \text{id} + J$ – жорданова клетка размерности $k \times k$, т.е. $J_{ij} = 1$, если $j = i+1$, и $J_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда существует константа C (зависящая только от λ и k) такая, что

$$\|A^n\| \leq C n^k |\lambda|^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$A^n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n}{\nu} \lambda^{n-\nu} J^\nu$$

и $\|J^\nu\| = 1$ для $\nu < k$. Поэтому

$$\|A^n\| \leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n}{\nu} |\lambda|^{n-\nu} \leq k \max(1, |\lambda|^{-k}) n^k |\lambda|^n.$$

Теперь мы можем доказать предложение 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Предположим, что M локально неэквивалентна квадрике. Согласно результату Ежова можем считать, что Φ имеет вид

$$z^* = \lambda A z, \quad w^* = (\pm) \lambda^2 w,$$

где A – псевдо-унитарная матрица относительно формы Леви и λ – вещественное число, которое определяется однозначно через A условием инвариантности первого неквадратичного члена уравнения M .

Без ограничения общности можем считать, что A имеет жорданову нормальную форму. Тогда $\mathbb{C}^n$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств V_j , так что

$$A|_{V_j} = A_j = \mu_j \text{id} + J.$$

Через V_- (V_+) мы обозначим прямые суммы из тех корневых подпространств V_j с $|\lambda \mu_j| < 1$ ($|\lambda \mu_j| \geq 1$).

Для того чтобы вектор $q = (q', q_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ стремился к 0 при повторном применении Φ , необходимо и достаточно, чтобы компонента q_+ в $q' = q_+ + q_-$ и $q_{n+1} = 0$ обращались в 0.

Действительно, пусть $|\mu_j \lambda| \geq 1$ и пусть $q_j = \sum q_j^\ell$ – разложение относительно жорданова базиса в V_j . Если $\Phi^n(q)$ стремится к 0, то q_j^1 обязаны обратиться в 0. Но раз так, то поочередно все q_j^ℓ тоже обратятся в 0.

С другой стороны, если $|\mu_j \lambda| < 1$, то согласно лемме 1 $\lambda^n A_j^n q_j \rightarrow 0$ для всех $q_j \in V_j$.

Теперь мы изучим действие Φ на уравнении M . Поскольку Φ – автоморфизм,

$$v - \sum \lambda^{m-2} F^m(Az, \bar{A}\bar{z}, u) = 0,$$

когда $v = \sum F^m(z, \bar{z}, u)$, где F^m – однородные компоненты веса m в уравнении M . Поэтому

$$F^m(z_-, \bar{z}_-, 0) = \lambda^{(m-2)n} F^m(A^n z_-, \bar{A}^n \bar{z}_-, 0) = \lambda^{-2n} F^m((\lambda A)^n z_-, (\lambda \bar{A})^n \bar{z}_-, 0) \rightarrow 0.$$

Отсюда следует

$$F^\ell(q_-, \bar{q}_-, 0) = 0$$

для любой сжимаемой точки $q = (q_-, 0)$; значит, $q \in M$. Так как это равенство, в частности, верно для формы Леви F^2 , мы заключаем, что $\vec{0q}$ должен лежать на световом луче.

В заключение приведем пример, который показывает, что для косжимающего автоморфизма Φ любая точка может оказаться Φ -сжимаемой.

ПРИМЕР 1. Пусть $M \subset \mathbb{C}^3$ задано уравнением $\operatorname{Im} w = \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^4$. Автоморфизм

$$\Phi: (z_1, z_2, w) \mapsto (\mu^3 z_1, \mu z_2, \mu^4 w)$$

является косжимающим при $|\mu| < 1$. Все точки $q \in \mathbb{C}^3$ Φ -сжимаемые.

Авторы приносят искреннюю благодарность В. Ежову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wong B. // Invent. Math. 1977. V. 41. № 3. P. 253–257.
2. Rosay J.-P. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1979. V. 29. № 4. P. 91–97.
3. Ефимов А. М. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 7. С. 41–50.
4. Schoen R. // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5. № 2. P. 464–481.
5. Spiro A. // Geom. Dedicata. 1997. V. 67. P. 199–221.
6. Кружилин Н. Г., Лобода А. В. // Докл. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 271. № 2. С. 280–282.
7. Ежов В. В. // УМН. 1986. Т. 41. № 3. С. 181–182.
8. Ежов В. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 4. С. 731–765.

(Кан-Тэ Ким) Пхоханский Университет
науки и технологии, г. Пхохан, Республика Корея
(Г. Шмальц) Институт математики им. М. Планка, г. Бонн, ФРГ
E-mail: kinkt@postech.ac.kr, schmalz@mpim-bonn.mpg.de

Поступило
20.02.2004