Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, А. Н. Шерстнев, Проекторно-выпуклые комбинации в C^* -алгебрах со свойством унитарной факторизации, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 625–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:20:58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПРОЕКТОРНО-ВЫПУКЛЫЕ КОМБИНАЦИИ В C^* -АЛГЕБРАХ СО СВОЙСТВОМ УНИТАРНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

А. М. Бикчентаев, А. Н. Шерстнев

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Через $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначим $*$ -алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Оператор $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *проектором*, если $x = x^2 = x^*$. Для унитарной C^* -подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ через $\mathcal{A}^u$, $\mathcal{A}^{sa}$ и $\mathcal{A}^{pr}$ будем обозначать ее подмножества унитарных операторов, эрмитовых операторов и проекторов соответственно. Положим $\mathcal{A}^{sym} = \mathcal{A}^u \cap \mathcal{A}^{sa}$ и $\mathcal{A}_r = \{x \in \mathcal{A} : \|x\| \leq r\}$ для $r > 0$. Пусть e – единица $\mathcal{A}$ и $p^\perp = e - p$ для $p \in \mathcal{A}^{pr}$.

В [1] доказано, что каждый оператор $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более, чем двух проекторов при $\dim \mathcal{H} = \infty$ и не более, чем трех проекторов при $2 \leq \dim \mathcal{H} < \infty$. Там же дан обзор имеющихся работ в этом направлении в контексте алгебр фон Неймана. В [2] показано, что произвольная алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ совпадает с множеством всех линейных комбинаций проекторов с коэффициентами из ее центра $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$. В [3, теорема 4.7] доказано, что каждая бесконечная простая унитарная C^* -алгебра $\mathcal{A} = \text{Lin}_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^{pr}$.

В этой заметке мы даем представление специального вида для операторов из широкого класса C^* -алгебр. Результат является новым и для алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Унитарная C^* -алгебра $\mathcal{A}$ обладает *свойством унитарной факторизации* (запись $\mathcal{A} \in (\text{UF})$), если каждый $u \in \mathcal{A}^u$ является конечным произведением операторов из $\mathcal{A}^{sym}$.

Если C^* -алгебра $\mathcal{A} \in (\text{UF})$, то каждый оператор $x \in \mathcal{A}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum \lambda_k x_k$, где каждое $\lambda_k \in \{-1; 1\}$, а x_k – конечное произведение проекторов из $\mathcal{A}$. Действительно, в силу [4, предложение 1] каждый оператор $x \in \mathcal{A}_1$ представляется в виде суммы $x = u_1 + u_2 + u_3$ с некоторыми $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{A}^u$.

Примеры C^* -алгебр $\mathcal{A} \in (\text{UF})$ могут быть заимствованы из [5]–[9]. В частности, каждая унитарная чисто бесконечная простая C^* -алгебра $\mathcal{A} \in (\text{UF})$ [10, теорема 3.8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M} \in (\text{UF})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ не имеет прямых слагаемых конечного типа I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация ' $\Leftarrow$ ' установлена в [8, теорема 1.6]. Для проверки импликации ' $\Rightarrow$ ' покажем, что каждая конечного типа I алгебра фон Неймана $\mathcal{M} \notin (\text{UF})$. По [11, гл. 5, теорема 1.27] существует единственное (проиндексированное конечными кардинальными числами) ортогональное семейство $\{z_\alpha\} \subset \mathcal{Z}(\mathcal{M})^{pr}$ с $\sum z_\alpha = e$ такое, что редуцированная алгебра $\mathcal{M}_{z_\alpha}$ изоморфна тензорному произведению абелевой алгебры фон Неймана $\mathcal{M}_\alpha$ и $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ с $\dim \mathcal{H}_\alpha = \alpha < \infty$. Следовательно,

$$\mathcal{M} \simeq \sum_{\alpha}^{\oplus} \mathcal{M}_{\alpha} \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\alpha}).$$

Работа выполнена при поддержке программы “Университеты России – Фундаментальные исследования”, грант № УР.04.01.011.

Очевидно, $\mathcal{M}_\alpha \notin (\text{UF})$. Используя детерминанты, имеем $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha) \notin (\text{UF})$ для каждого α . Реализуем (по Гельфанду) алгебру $\mathcal{M}_\alpha$ в виде алгебры $C(\Omega_\alpha)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на экстремально несвязном компактном хаусдорфовом (т.е. стоуновском) пространстве Ω_α всех характеров алгебры $\mathcal{M}_\alpha$. Используя естественный изоморфизм алгебры $C(\Omega_\alpha) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ алгебре функциональных $(\alpha \times \alpha)$ -матриц $M_\alpha(C(\Omega_\alpha))$ с обычными поточечными операциями и порядком и детерминанты, имеем $\mathcal{M} \notin (\text{UF})$.

Для унитарной C^* -алгебры $\mathcal{A}$ зададим индуктивный процесс, положив

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{A}^{\text{pr}}, \quad \dots, \quad \mathcal{L}_{n+1} = \{ap + bp^\perp : a, b \in \mathcal{L}_n, p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\}, \quad \dots$$

Имеем включения $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \dots$. Положим $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{L}_n$.

ТЕОРЕМА. Если $\mathcal{A} \in (\text{UF})$, то $\mathcal{A} = \mathcal{L}$.

Далее всюду C^* -алгебра $\mathcal{A} \in (\text{UF})$. Прежде, чем доказывать теорему, приведем вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Имеет место эквивалентность

$$t \in \mathcal{L} \iff e - t \in \mathcal{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Методом математической индукции проверяется, что

$$t \in \mathcal{L}_n \iff e - t \in \mathcal{L}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 2. Для любых $a, b \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{A}^u$ оператор

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot u \in \mathcal{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула $s_p = p - p^\perp$, $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ и $\mathcal{A}^{\text{sym}}$. Пусть $a, b \in \mathcal{L}$, $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ произвольны. Тогда операторы $t = ap + bp^\perp$, $\tilde{t} = ap^\perp + bp \in \mathcal{L}$. Имеем

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot s_p, \quad \tilde{t} = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \cdot s_p.$$

Теперь для произвольного $q \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ имеем

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot s_p s_q = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot s_p (q - q^\perp) = tq + \tilde{t}q^\perp \in \mathcal{L}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot s_1 s_2 \dots s_n \in \mathcal{L}$$

для любых $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для любых $a \in \mathcal{L}$, $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{A}^u$ оператор

$$a \cdot \frac{e+u_1}{2} \cdot \frac{e+u_2}{2} \dots \frac{e+u_n}{2} \in \mathcal{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приняв $b = 0$, для произвольных $a \in \mathcal{L}$ и $u = u_1 \in \mathcal{A}^u$ по лемме 2 получаем, что оператор

$$a \cdot \frac{e+u_1}{2} \in \mathcal{L}.$$

Приняв $a \cdot (e + u_1)/2$ за новый элемент из $\mathcal{L}$, по лемме 2 для произвольного $u_2 \in \mathcal{A}^u$ получаем, что

$$a \cdot \frac{e+u_1}{2} \cdot \frac{e+u_2}{2} \in \mathcal{L}.$$

Остается повторить этот процесс нужное число раз. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для каждого оператора $x \in \tilde{\mathcal{A}}_{1/2} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}}$ оператор $ix \in \mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $u = 2x + i\sqrt{e - 4x^2} \in \mathcal{A}^u$, имеем

$$ix = i \cdot \frac{u + u^*}{4} = e \cdot \frac{e + iu}{2} \cdot \frac{e + iu^*}{2} \in \mathcal{L}$$

в силу по леммы 3 с $a = e$, $u_1 = iu$, $u_2 = iu^*$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Множество $\tilde{\mathcal{A}}_{1/4} \subset \mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z \in \tilde{\mathcal{A}}_{1/2}$ положим

$$z_1 = \operatorname{Re} z, \quad z_2 = \operatorname{Im} z, \quad x = \frac{z_2 - z_1}{2}, \quad y = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Тогда $z_1, z_2, x, y \in \tilde{\mathcal{A}}_{1/2} \cap \mathcal{A}^{\text{sa}}$. Из леммы 4 следует, что операторы $ix, iy \in \mathcal{L}$. Теперь

$$\frac{z}{2} = \frac{y - x}{2} + i \cdot \frac{x + y}{2} = \frac{ix + iy}{2} + \frac{ix - iy}{2} \cdot ie \in \mathcal{L}$$

в силу леммы 2 с $a = ix$, $b = iy$, $u = ie$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. По лемме 5 оператор $-e/4 \in \mathcal{L}$. В силу леммы 1 и определения множества $\mathcal{L}$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такой, что оператор

$$\frac{5e}{4} = e - \left(-\frac{e}{4}\right) \in \mathcal{L}_n.$$

Для произвольного $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ по построению последовательности $\{\mathcal{L}_k\}$ имеем

$$\frac{5p}{4} = \frac{5e}{4} \cdot p \in \mathcal{L}_{n+1},$$

тем самым, $(5/4)\mathcal{A}^{\text{pr}} \subset \mathcal{L}_{n+1}$. Теперь в силу положительной однородности индуктивного процесса построения $\{\mathcal{L}_k\}$ получаем

$$\frac{5}{4}\tilde{\mathcal{A}}_{1/4} = \tilde{\mathcal{A}}_{5/16} \subset \mathcal{L}.$$

Продолжая этот процесс, получаем включение $\tilde{\mathcal{A}}_{5^k/4^{k+1}} \subset \mathcal{L}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\frac{5^k}{4^{k+1}} \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

имеем $\tilde{\mathcal{A}}_r \subset \mathcal{L}$ для любого $r > 0$. Осталось заметить, что $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{A}}_k$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Каждый оператор из C^* -алгебры $\mathcal{A} \in (\text{UF})$ представляется в виде конечной суммы конечных произведений ее проекторов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть C^* -алгебра $\mathcal{A} \in (\text{UF})$. Зададим индуктивный процесс, положив

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{A}^{\text{pr}}, \quad \dots, \quad \mathcal{S}_{n+1} = \{pa + p^\perp b : a, b \in \mathcal{S}_n, p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}\}, \quad \dots$$

Тогда $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$.

Авторы выражают свою признательность Н. Филиппсу, Д. Х. Муштари и О. Е. Тихонову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бикчентаев А. М. // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 444–447. 2. Goldstein S., Paszkiewicz A. // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116. № 1. P. 175–183. 3. Marcoux L. W., Murphy G. J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. № 12. P. 3597–3605. 4. Haagerup U. On convex combinations of unitary operators in C^* -algebras // Progress in Mathematics “Mappings of Operator Algebras”. V. 84. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1990. P. 1–13. 5. Halmos P., Kakutani S. // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V. 64. № 1. P. 77–78. 6. Broise M. // J. Math. Pures Appl. 1967. V. 46. № 2. P. 299–312. 7. Fillmore P. A. // Canad. J. Math. 1966. V. 18. № 5. P. 897–900. 8. Upmeyer H. // Math. Z. 1981. V. 176. № 1. P. 21–34. 9. Thakare N. K., Baliga A. R. // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. № 4. P. 1005–1008. 10. Leen M. // Canad. J. Math. 1997. V. 49. № 5. P. 1188–1205. 11. Takesaki M. Theory of Operator Algebras. V. I. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1979.