Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Ю. Шамарова, Построение броуновского листа со значениями в компактном римановом многообразии, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 635–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:10:29

ПОСТРОЕНИЕ БРОУНОВСКОГО ЛИСТА СО ЗНАЧЕНИЯМИ В КОМПАКТНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Э. Ю. Шамарова

В настоящей работе предложен новый метод построения двухпараметрического случайного поля $\mathbf{W}_M^x(s, t)$, $x \in M$, со значениями в компактном римановом многообразии M , обладающего тем свойством, что случайные процессы $\mathbf{W}_M^x(\cdot, t)$ и $\mathbf{W}_M^x(s, \cdot)$ представляют собой броуновские движения на многообразии M с параметрами t и s соответственно, начинающиеся в точке x (под *броуновским движением* на многообразии M с параметром t понимается диффузионный процесс, порождаемый оператором $-(t/2)\Delta_M$, где Δ_M – оператор Лапласа на многообразии M). В том случае, когда многообразие представляет собой компактную группу Ли, построенное двухпараметрическое случайное поле совпадает с броуновским листом, определенным Малливером в 1991 г. в работе [1] (сам Малливер называл это случайное поле броуновским движением со значениями в $C([0, 1], M)$ – множестве непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и принимающих значения в M). Тем не менее, и в случае, когда многообразие является компактной группой Ли, метод, предложенный в настоящей работе, принципиально отличается от метода работы Малливерна.

1. Первый шаг построения случайного поля $\mathbf{W}_M^x$. Пусть M – d -мерное компактное риманово многообразие без границы, изометрически вложенное в $\mathbb{R}^m$. Под *броуновским листом со значениями в $\mathbb{R}^m$* мы понимаем семейство m независимых стандартных броуновских листов. Пусть $\mathbf{W}_{t,s}$ – n -мерный броуновский лист. Рассмотрим $\mathbf{W}_{t,s}$ как процесс, принимающий значения в пространстве $C([0, 1], \mathbb{R}^m)$. Обозначим этот процесс символом $\mathbf{W}_t$. Введем следующие обозначения: если E – локально выпуклое пространство (ЛВП), то E^t означает $C([0, t], E)$; если $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^m)$ – некоторая непрерывная функция, то $\mathbb{W}^y$ означает распределение процесса $\mathbf{W}_t^y = y + \mathbf{W}_t$. Если $\psi \in C([0, 1], \mathbb{R}^m)$, то определим процесс $(\mathbf{W}_\psi^y)_t = \psi(t) + \mathbf{W}_t^y$. Пусть $\tilde{\mathbb{W}}_\psi^y$ – распределение этого процесса, $E_{y,\psi}$ – математическое ожидание относительно меры $\tilde{\mathbb{W}}_\psi^y$. Далее, $U_\varepsilon(M)$ означает ε -окрестность многообразия M . Мы будем рассматривать $\mathbf{W}_\psi^y$ для функций y и ψ , удовлетворяющих условиям: $y(0) \in M$, $\psi(0) = 0$. Цель этого пункта – доказать существование следующего ниже предела относительно семейства ограниченных непрерывных цилиндрических функций, где под цилиндрической функцией $C([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ мы всюду будем понимать такую функцию f , для которой найдется конечный набор точек $\tau_1, \dots, \tau_n, \xi_1, \dots, \xi_k$ и функция $\tilde{f}: \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(\omega) = \tilde{f}(\omega(\tau_1, \xi_1), \omega(\tau_1, \xi_2), \dots, \omega(\tau_n, \xi_k)).$$

Этот предел определяет меру $\tilde{\mathbb{W}}_{M,\psi,s,t}^y$:

$$\int_{C([0,s],\mathbb{R}^m)_t} f(\omega) \tilde{\mathbb{W}}_{M,\psi,s,t}^y(d\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E_{y,\psi} \{f(\omega) \mathbb{I}_{\{(\mathbf{W}_\psi^y)_t(s) \in U_\varepsilon(M)\}}\}}{\tilde{\mathbb{W}}_\psi^y \{(\mathbf{W}_\psi^y)_t(s) \in U_\varepsilon(M)\}}. \quad (1)$$

Перед тем, как мы докажем существование этого предела, рассмотрим процесс

$$(\mathbf{W}_{\psi,s}^z)_t = \psi(t) + B_t^s,$$

где $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\psi(0) = 0$, и B_t^s – броуновское движение с параметром s , начинающееся в точке z . Результаты, полученные для этого процесса, будут применены для последующего построения.

Некоторые результаты для процесса $(\mathbf{W}_{\psi,s}^z)_t$. Пусть $\mathbb{W}_{\psi,s}^z$ означает распределение процесса $(\mathbf{W}_{\psi,s}^z)_t$, $E_{z,\psi,s}$ – математическое ожидание относительно этого распределения.

ЛЕММА 1. *Предел*

$$\int_{C([0,t], \mathbb{R}^m)} f(\omega) \mathbb{W}_{M, \psi, s, t}^z(d\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_{z, \psi, s} \{f(\omega) \mathbb{I}_{\{(\mathbf{W}_{\psi, s}^z)_t \in U_\varepsilon(M)\}}\}}{\mathbb{W}_{\psi, s}^z \{(\mathbf{W}_{\psi, s}^z)_t \in U_\varepsilon(M)\}},$$

рассматриваемый относительно семейства непрерывных ограниченных цилиндрических функций, существует и определяет меру $\mathbb{W}_{M, \psi, s, t}^z$, стоящую в интеграле слева.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Найдем функцию $\tilde{f}: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ и конечное множество точек $\tau_1, \dots, \tau_k$ такие, что

$$f(\omega) = \tilde{f}(\omega(\tau_1), \dots, \omega(\tau_k), \omega(t)).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{C([0,t], \mathbb{R}^m)} f(\omega) \mathbb{W}_{M, \psi, s, t}^z(d\omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{C([0,t], \mathbb{R}^m)} f(\omega) \mathbb{I}_{\{\omega: \omega(t) \in U_\varepsilon(M)\}} \mathbb{W}_{\psi, s}^z(d\omega)}{\mathbb{W}_{\psi, s}^z \{\omega: \omega(t) \in U_\varepsilon(M)\}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbb{P}^{\mathbb{W}}(t, 0, U_\varepsilon(M - z - \psi(t)))} \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{P}^{\mathbb{W}}(\tau_1, 0, dx_1) \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{P}^{\mathbb{W}}(\tau_2 - \tau_1, x_1, dx_2) \dots \\ &\quad \times \int_{U_\varepsilon(M - \psi(t) - z)} \mathbb{P}^{\mathbb{W}}(t - \tau_k, x_k, dx_{k+1}) \\ &\quad \times \tilde{f}(x_1 + z + \psi(\tau_1), \dots, x_k + z + \psi(\tau_k), x_{k+1} + z + \psi(t)), \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{P}^{\mathbb{W}}(\tau, x, dz) = \frac{1}{(2\pi s\tau)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{|z-x|^2}{2s\tau}\right\} dz.$$

Так как функция под знаком интеграла ограничена, то по теореме Лебега достаточно доказать существование предела

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{U_\varepsilon(M - \psi(t) - z)} \tilde{f}(x_1 + z + \psi(\tau_1), \dots, x_{k+1} + z + \psi(t)) \mathbb{P}^{\mathbb{W}}(t - \tau_k, x_k, dx_{k+1})}{\mathbb{P}^{\mathbb{W}}(t, 0, U_\varepsilon(M - z - \psi(t)))} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{U_\varepsilon(M - \psi(t) - z - x_k)} \tilde{f}(x_1 + z + \psi(\tau_1), \dots, x_{k+1} + x_k + z + \psi(t)) \mathbb{P}^{\mathbb{W}}(t - \tau_k, 0, dx_{k+1})}{\mathbb{P}^{\mathbb{W}}(t, 0, U_\varepsilon(M - z - \psi(t)))}. \end{aligned}$$

Обозначим через M_1 многообразие $M - \psi(t) - z - x_k$, через M_2 многообразие $M - \psi(t) - z$. Пусть далее

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{\text{vol}_{m-d}(\varepsilon)} l|_{U_\varepsilon(M_1)}, \quad \mu_\varepsilon = \frac{1}{\text{vol}_{m-d}(\varepsilon)} l|_{U_\varepsilon(M_2)},$$

где l – мера Лебега на $\mathbb{R}^m$. Легко видеть, что доказательство существования этого предела сводится к доказательству существования предела вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^m} g(x_{k+1}) \exp\left\{-\frac{|x_{k+1} - x_k|^2}{2s(t - \tau_k)}\right\} \lambda_\varepsilon(dx_{k+1})}{\int_{\mathbb{R}^m} \exp\left\{-\frac{|x_{k+1}|^2}{2st}\right\} \mu_\varepsilon(dx_{k+1})},$$

где $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – другое обозначение для функции $\tilde{f}$, в котором выражена зависимость только от последней переменной. Легко показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ меры λ_ε и μ_ε сходятся слабо к поверхностным мерам на M_1 и M_2 соответственно.

ЛЕММА 2. *Предел (1) существует относительно семейства непрерывных ограниченных цилиндрических функций.*

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть $\tilde{P}^{\tilde{W}}(t, y, \Gamma) = \tilde{W}^y(\omega : \omega(t) \in \Gamma)$ – переходная вероятность для меры $\tilde{W}^y$, где $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^m)$. Пусть далее функция $\tilde{f}: C([0, s], \mathbb{R}^m)^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ и конечное множество точек $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ таковы, что

$$f(\omega) = \tilde{f}(\omega(\tau_1), \omega(\tau_2), \dots, \omega(\tau_k), \omega(t)).$$

Символ π_s означает координатное отображение. Доказательство проводится с использованием формулы из [2, с. 204]

$$\begin{aligned} \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)^t} f(\omega) \tilde{W}^0(d\omega) &= \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)} P^{\tilde{W}}(\tau_1, 0, dw_1) \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)} P^{\tilde{W}}(\tau_2 - \tau_1, w_1, dw_2) \dots \\ &\times \int_{\pi_s^{-1}(U_\varepsilon(M - \psi(t) - y(s)))} \tilde{f}(w_1, \dots, w_{k+1}) P^{\tilde{W}}(t - \tau_k, w_k, dw_{k+1}) \end{aligned}$$

и применением леммы 1 к мере в последнем интеграле.

2. Асимптотика по t для интеграла одного вида.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть i – изометрическое вложение многообразия M в $\mathbb{R}^m$, $g \in C^2(M)$. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int_M g(z) \exp\left\{-\frac{|z-y|^2}{2t}\right\} \lambda_M(dz) = g(y) + \frac{t}{8} g(y) (c(y) - \text{scal}(y)) - \frac{t}{2} \Delta_M g(y) + tR(t, y),$$

где $|R(t, y)| < Kt^{1/2}$, K – константа, которая не зависит от y , $\text{scal}(y)$ – скалярная кривизна в точке y ; функция $c(y)$ имеет вид

$$c(y) = \sum_{k,l} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 i^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^l} \right)^2 (0),$$

где x^k – нормальные координаты в некоторой окрестности U_y точки y , обеспечиваемые гомеоморфизмом окрестности U_y на некоторую окрестность нуля U в $\mathbb{R}^d$. Независимо от локальных координат $c(y)$ может быть записана в виде

$$c(y) = -\frac{1}{2} \Delta_M \Delta_M |y - \cdot|^2|_y - \frac{1}{3} \text{scal}(y)$$

и, следовательно, $c(y)$ зависит только от вложения i .

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Получено более точное асимптотическое выражение по сравнению с тем, которое было получено для интеграла такого же вида в [3]. Идея доказательства та же самая.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $g \in C^2(M)$. Тогда мы имеем следующую асимптотику:

$$\frac{\int_M g(z) \exp\left\{-\frac{|z-y|^2}{2t}\right\} \lambda_M(dz)}{\int_M \exp\left\{-\frac{|z-y|^2}{2t}\right\} \lambda_M(dz)} = g(y) - \frac{t}{2} \Delta_M g(y) + tR_1(t, y),$$

где $|R_1(t, y)| < K_1 t^{1/2}$, а K_1 – константа, не зависящая от y .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $g \in C^2(M)$, $y \in M$, ψ – гёльдерова функция порядка гёльдеровости $1/3 < \alpha < 1/2$ такая, что $\psi(0) = 0$. Пусть Pr_M – отображение проектирования на многообразие M вдоль нормальных к многообразию подпространств, определенное в подходящей окрестности многообразия, $\psi_M(t, y) = \text{Pr}_M(y + \psi(t))$. Имеет место следующая асимптотика:

$$\frac{\int_M g(z) \exp\left\{-\frac{|z-y-\psi(t)|^2}{2t}\right\} \lambda_M(dz)}{\int_M \exp\left\{-\frac{|z-y-\psi(t)|^2}{2t}\right\} \lambda_M(dz)} = g(y + \psi_M(t)) - \frac{t}{2} \Delta_M g(y) + tR_2(t, y),$$

где $|R_2(t, y)| < K_2 t^{3\alpha-1}$, K_2 – константа.

3. Второй шаг построения случайного поля W_M^x . Пусть f – непрерывная ограниченная цилиндрическая функция на $C([0, s], \mathbb{R}^m)^1$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$ – функция, являющаяся траекторией броуновского движения на M , такая, что $\varphi(0) = x$. Пусть $\mathcal{P}_1 = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1\}$ – разбиение интервала $[0, 1]$. Если E – это ЛВП, то каждое $\omega \in E^1$ может быть отождествлено с конечной последовательностью из n элементов

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in E^{t_1} \times E^{t_2 - t_1} \times \dots \times E^{t_n - t_{n-1}},$$

где ω_j определено на интервале $[0, t_j - t_{j-1}]$ по формуле $\omega_j(t) = \omega(t_{j-1} + t)$. Определим функцию $\varphi_{t_{i-1}t_i}$ на интервале $[0, t_i - t_{i-1}]$ следующим образом:

$$\varphi_{t_{i-1}t_i}(t) = \varphi(t_{i-1} + t) - \varphi(t_{i-1}).$$

Определим меру $\tilde{W}_{M, \varphi, s, \mathcal{P}_1}^x$ формулой

$$\begin{aligned} \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)^1} f(\omega) \tilde{W}_{M, \varphi, s, \mathcal{P}_1}^x(d\omega) &= \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)^{t_1}} \tilde{W}_{M, \varphi_{0t_1}, s, t_1}^x(d\omega_1) \\ &\times \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)^{t_2 - t_1}} \tilde{W}_{M, \varphi_{t_1t_2}, s, t_2 - t_1}^{\omega_1(t_1)}(d\omega_2) \dots \\ &\times \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)^{t_n - t_{n-1}}} \tilde{W}_{M, \varphi_{t_{n-1}t_n}, s, t_n - t_{n-1}}^{\omega_{n-1}(t_{n-1} - t_{n-2})}(d\omega_n) f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что $\omega_i(t_i - t_{i-1})(0) \in M$, так что мера $\tilde{W}_{M, \varphi, s, \mathcal{P}_1}^x$ определена корректно. Далее, пусть $\mathcal{P}_2 = \{0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k = 1\}$ – разбиение интервала $[0, 1]$. Пусть теперь s – параметр времени. Вместо символа $\tilde{W}_{M, \varphi, s, \mathcal{P}_1}^x$ будем пользоваться символом $\tilde{W}_{M, s, \mathcal{P}_1}^\varphi$. Определим меру $W_{M, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}^x$ формулой

$$\begin{aligned} \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^m)^1} f(\omega) W_{M, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}^x(d\omega) &= \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^m)^{s_1}} \tilde{W}_{M, s_1, \mathcal{P}_1}^x(d\omega_1) \\ &\times \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^m)^{s_2 - s_1}} \tilde{W}_{M, s_2 - s_1, \mathcal{P}_1}^{\omega_1(s_1)}(d\omega_2) \dots \\ &\times \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^m)^{s_n - s_{n-1}}} \tilde{W}_{M, s_n - s_{n-1}, \mathcal{P}_1}^{\omega_{n-1}(s_{n-1} - s_{n-2})}(d\omega_n) f(\omega_1, \dots, \omega_n). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $x \in M$, если мелкости разбиений $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ стремятся к нулю, то последовательность мер $W_{M, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}^x$ сходится слабо относительно семейства непрерывных ограниченных цилиндрических функций к мере W_M^x . Мера W_M^x , рассматриваемая как распределение процесса со значениями в $C([0, 1], M)$, обладает переходной вероятностью в момент времени t , совпадающей с распределением броуновского движения на многообразии с параметром t , начинающегося в точке x .

Идея доказательства. Пусть

$$\begin{aligned} h \cdot W_{M, \varphi, s, \mathcal{P}_1}^x &= h \cdot W_{M, s, \mathcal{P}_1}^\varphi = \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^m)} h(\omega) W_{M, \varphi, s, \mathcal{P}_1}^x(d\omega) \\ &= \int_{C([0, t_1], \mathbb{R}^m)} W_{M, \varphi_{0t_1}, s, t_1}^x(d\omega_1) \int_{C([0, t_2 - t_1], \mathbb{R}^m)} W_{M, \varphi_{t_1t_2}, s, t_2 - t_1}^{\omega_1(t_1)}(d\omega_2) \dots \\ &\times \int_{C([0, t_n - t_{n-1}], \mathbb{R}^m)} W_{M, \varphi_{t_{n-1}t_n}, s, t_n - t_{n-1}}^{\omega_{n-1}(t_{n-1} - t_{n-2})}(d\omega_n) h(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \end{aligned}$$

Пусть существует $\tilde{f}: C([0, 1], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f(\omega) = \tilde{f}(\omega(t))$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{C([0, s], \mathbb{R}^m)^1} f(\omega) \tilde{W}_{M, s, \mathcal{P}_1}^\varphi(d\omega) &= \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^m)} \tilde{f}(w) \tilde{W}_{M, s, \mathcal{P}_1}^\varphi \circ \pi_s^{-1}(dw) \\ &= \int_{C([0, 1], \mathbb{R}^m)} \tilde{f}(w) W_{M, s, \mathcal{P}_1}^\varphi(dw). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_{C([0,1],\mathbb{R}^m)^1} f(\omega) \mathbb{W}_{M,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}^x(d\omega) &= \int_{C([0,1],\mathbb{R}^m)} \mathbb{W}_{M,s_1,\mathcal{P}_1}^x(dw_1) \\ &\times \int_{C([0,1],\mathbb{R}^m)} \mathbb{W}_{M,s_2-s_1,\mathcal{P}_1}^{w_1}(dw_2) \cdots \int_{C([0,1],\mathbb{R}^m)} \mathbb{W}_{M,s_{n-1}-s_{n-2},\mathcal{P}_1}^{w_{n-2}}(dw_{n-1}) \\ &\times \int_{C([0,1],\mathbb{R}^m)} \mathbb{W}_{M,s_n-s_{n-1},\mathcal{P}_1}^{w_{n-1}}(dw_n) \tilde{f}(w_n). \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_{C([0,t],\mathbb{R}^m)} g(\omega) \mathbb{W}_{M,\psi,s,t}^z(d\omega),$$

где функция $g \in C([0,t],\mathbb{R}^m)$ такова, что существует функция $\tilde{g} \in C(\mathbb{R})$ такая, что $g(\omega) = \tilde{g}(\omega(t))$. В результате несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \int_{C([0,t],\mathbb{R}^m)} g(\omega) \mathbb{W}_{M,\psi,s,t}^z(d\omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{C([0,t],\mathbb{R}^m)} g(\omega) \mathbb{I}_{\{\omega:\omega(t) \in U_\varepsilon(M)\}}(\omega) \mathbb{W}_{\psi,s}^z(d\omega)}{\mathbb{W}_{\psi,s}^z\{\omega:\omega(t) \in U_\varepsilon(M)\}} \\ &= \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|x_1-z-\psi(t)|^2}{2ts}\right\} \tilde{g}(x_1) \lambda_M(dx_1)}{\int_M \exp\left\{-\frac{|x_1-z-\psi(t)|^2}{2ts}\right\} \lambda_M(dx_1)}. \end{aligned}$$

Предположим сначала, что функция f такова, что найдутся функция $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и числа $t, s \in [0,1]$, такие, что $f(\omega) = p(\omega(t,s))$. Интеграл

$$\int_{C([0,1],\mathbb{R}^m)^1} f(\omega) \mathbb{W}_{M,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}^x(d\omega)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|x_1-x|^2}{2\Delta s_1 \Delta t_1}\right\} dx_1}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{x}_1-x|^2}{2\Delta s_1 \Delta t_1}\right\} d\bar{x}_1} \cdots \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|x_{n-1}-x_{n-2}|^2}{2\Delta s_1 \Delta t_{n-1}}\right\} dx_{n-1}}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{x}_{n-1}-x_{n-2}|^2}{2\Delta s_1 \Delta t_{n-1}}\right\} d\bar{x}_{n-1}} \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|x_n-x_{n-1}|^2}{2\Delta s_1 \Delta t_n}\right\} dx_n}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{x}_n-x_{n-1}|^2}{2\Delta s_1 \Delta t_n}\right\} d\bar{x}_n} \\ &\times \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|y_1-x_1|^2}{2\Delta s_2 \Delta t_1}\right\} dy_1}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{y}_1-x_1|^2}{2\Delta s_2 \Delta t_1}\right\} d\bar{y}_1} \cdots \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|y_{n-1}-y_{n-2}-x_{n-1}+x_{n-2}|^2}{2\Delta s_2 \Delta t_{n-1}}\right\} dy_{n-1}}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{y}_{n-1}-y_{n-2}-x_{n-1}+x_{n-2}|^2}{2\Delta s_2 \Delta t_{n-1}}\right\} d\bar{y}_{n-1}} \\ &\times \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|y_n-y_{n-1}-x_n+x_{n-1}|^2}{2\Delta s_2 \Delta t_n}\right\} dy_n}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{y}_n-y_{n-1}-x_n+x_{n-1}|^2}{2\Delta s_2 \Delta t_n}\right\} d\bar{y}_n} \cdots \\ &\times \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|u_1-z_1|^2}{2\Delta s_{k-1} \Delta t_1}\right\} du_1}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{u}_1-z_1|^2}{2\Delta s_{k-1} \Delta t_1}\right\} d\bar{u}_1} \cdots \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|u_{n-1}-u_{n-2}-z_{n-1}+z_{n-2}|^2}{2\Delta s_{k-1} \Delta t_{n-1}}\right\} du_{n-1}}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{u}_{n-1}-u_{n-2}-z_{n-1}+z_{n-2}|^2}{2\Delta s_{k-1} \Delta t_{n-1}}\right\} d\bar{u}_{n-1}} \\ &\times \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|u_n-u_{n-1}-z_n+z_{n-1}|^2}{2\Delta s_{k-1} \Delta t_n}\right\} du_n}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{u}_n-u_{n-1}-z_n+z_{n-1}|^2}{2\Delta s_{k-1} \Delta t_n}\right\} d\bar{u}_n} \\ &\times \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|v_1-u_1|^2}{2\Delta s_k \Delta t_1}\right\} dv_1}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{v}_1-u_1|^2}{2\Delta s_k \Delta t_1}\right\} d\bar{v}_1} \cdots \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|v_{n-1}-v_{n-2}-u_{n-1}+u_{n-2}|^2}{2\Delta s_k \Delta t_{n-1}}\right\} dv_{n-1}}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{v}_{n-1}-v_{n-2}-u_{n-1}+u_{n-2}|^2}{2\Delta s_k \Delta t_{n-1}}\right\} d\bar{v}_{n-1}} \\ &\times \frac{\int_M \exp\left\{-\frac{|v_n-v_{n-1}-u_n+u_{n-1}|^2}{2\Delta s_k \Delta t_n}\right\} p(v_n) dv_n}{\int_M \exp\left\{-\frac{|\bar{v}_n-v_{n-1}-u_n+u_{n-1}|^2}{2\Delta s_k \Delta t_n}\right\} d\bar{v}_n}, \end{aligned}$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\Delta s_j = s_j - s_{j-1}$, для упрощения обозначений вместо $\lambda_M(dz)$ использовано обозначение dz . Мы также считали, что $t_n = t$, $s_k = s$. Обозначим этот интеграл через $I(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)$.

ЛЕММА 3. Интеграл $I(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)$ сходится к $\exp\{-\frac{st}{2}\Delta_M\}p$, если мелконости $|\mathcal{P}_1|$ и $|\mathcal{P}_2|$ стремятся к нулю.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. С использованием следствий 1 и 2 предложения 1 получаем следующую асимптотику для интеграла $I(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)$:

$$I(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)(x) = p(x) - \frac{st}{2}\Delta_M p(x) + O(s^2 t^2) + O(|\mathcal{P}_2|, |\mathcal{P}_1|).$$

Откуда следует, что существует предел

$$\lim_{|\mathcal{P}_1| \rightarrow 0, |\mathcal{P}_2| \rightarrow 0} I(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)(x) = p(x) - \frac{st}{2}\Delta_M p(x) + O(s^2 t^2) = (Q_{st}p)(x).$$

Проверим далее, что $Q_{\tau+\Delta\tau} = Q_\tau Q_{\Delta\tau}$. Пусть s и t таковы, что $\tau = st$. Найдем Δs и Δt такие, что $\tau + \Delta\tau = (s + \Delta s)(t + \Delta t)$, и рассмотрим интеграл $I(\mathcal{P}_1^{[0, t+\Delta t]}, \mathcal{P}_2^{[0, s+\Delta s]}, p)$ для разбиений отрезков $[0, s+\Delta s]$ и $[0, t+\Delta t]$, дополнив соответствующие разбиения отрезков $[0, s]$ и $[0, t]$ точками разбиений отрезков $[t, t+\Delta t]$, $[s, s+\Delta s]$. Из структуры интеграла $I(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)$ легко видеть, что

$$I(\mathcal{P}_1^{[0, t+\Delta t]}, \mathcal{P}_2^{[0, s+\Delta s]}, p) = I(\mathcal{P}_1^{[0, t]}, \mathcal{P}_2^{[0, s]}, I(\mathcal{P}_1^{[t, t+\Delta t]}, \mathcal{P}_2^{[s, s+\Delta s]}, p)).$$

Переходя к пределу в этом выражении и учитывая, что $\Delta\tau = s\Delta t + t\Delta s + \Delta s\Delta t$, мы получим, что Q_τ является полугруппой, для которой в силу доказанного выше справедливо

$$(Q_\tau p)(x) = p(x) - \frac{\tau}{2}\Delta_M p(x) + O(\tau^2).$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$Q_\tau = \exp\left\{-\frac{\tau}{2}\Delta_M\right\}.$$

Для функции f , зависящей от ω в нескольких точках, скажем, в точках $\xi_i \in [0, s]$ и $\tau_j \in [0, t]$, вид интеграла $I(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)$ будет таким же. Сходимость, рассмотренная выше, будет иметь место на каждом квадрате $[\xi_{i-1}, \xi_i] \times [\tau_{j-1}, \tau_j]$. Каждый из операторов вида

$$\exp\left\{-\frac{\Delta\xi_i \Delta\tau_j}{2}\Delta_M\right\}$$

действует на соответствующую переменную функции p , определенную как

$$f(\omega) = p(\omega_{11}(\xi_1, \tau_1), \dots, \omega_{kl}(\xi_l, \tau_l)),$$

где ω_{ij} определена на $[0, \xi_i - \xi_{i-1}] \times [0, \tau_j - \tau_{j-1}]$ по формуле $\omega_{ij}(s, t) = \omega(\xi_{i-1} + s, \tau_{j-1} + t)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть M — компактная группа Ли. Тогда $\mathbf{W}_M^x$, рассматриваемый как процесс со значениями в $C([0, 1], M)$, совпадает с броуновским движением, построенным в [1].

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Доказательство следует из теоремы 1 и теоремы 2.15 из статьи [4] (теорема 2.15 из [4] доказана также в лемме 3.3 в статье [5]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malliavin P. // Diffusion Processes and Related Problems in Analysis (Evanston, IL, 1989). V. 1. Boston, MA: Birkhäuser, 1990. P. 17–31.
2. Ikeda N., Watanabe Sh. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam: North-Holland, 1981.
3. Smolyanov O. G., von Weizsäcker H., Wittich O. // Canad. Math. Soc. Conference Proc. 2000. V. 29. P. 589–602.
4. Driver B. K., Srimurthy V. K. // Ann. Probab. 2001. V. 29. № 2. P. 691–723.
5. Srimurthy V. K. // Probab. Theory Related Fields. 2000. V. 118. № 4. P. 522–546.