Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Сильниченко, О скорости сходимости жадных алгоритмов, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 628–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:27:52

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ЖАДНЫХ АЛГОРИТМОВ

А. В. Сильниченко

Введение. В данной работе речь пойдет о приближении элементов вещественного сепарабельного гильбертова пространства H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Подмножество элементов $D \subset H$ назовем *словарем*, если $\|g\| = 1$ для любого $g \in D$ и при этом замыкание линейной оболочки D в H совпадает с H . Для $f \in H$ обозначим через $g = g(f) \in D$ элемент из D , который максимизирует $|(f, g)|$ (предполагаем, что такой элемент всегда существует). Определим

$$G(f) = G(f, D) = (f, g)g, \quad R(f) = R(f, D) = f - G(f).$$

Определим *чистый жадный алгоритм* как алгоритм построения последовательностей $G_m(f)$ и $R_m(f)$ следующим образом: $R_0(f) = f$, $G_0(f) = 0$, далее по индукции

$$G_m(f) = G_{m-1}(f) + G(R_{m-1}(f)), \quad R_m(f) = f - G_m(f) = R(R_{m-1}(f)).$$

Определим для словаря D класс элементов

$$A_1^0(D, M) = \left\{ f \in H : f = \sum_{k \in \Lambda} c_k w_k, \quad w_k \in D, \quad |\Lambda| < \infty, \quad \sum_{k \in \Lambda} |c_k| \leq M \right\}.$$

Пусть $A_1(D, M)$ – замыкание в H множества $A_1^0(D, M)$. Положим

$$A_1(D) = \bigcup_{M > 0} A_1(D, M).$$

Для $f \in A_1(D)$ обозначим

$$|f|_{A_1(D)} = \min_{f \in A_1(D, M)} M.$$

В данных обозначениях сформулируем проблему оценки скорости сходимости жадного алгоритма следующим образом: оценить величину

$$f(m) = \sup \|f_m - G_m(f, D)\| \cdot |f|_{A_1(D)}^{-1}$$

в зависимости от m .

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-304.2003.1.

В 1996 г. Девором и Темляковым [1] получена оценка

$$\|f - G_m(f)\| \leq m^{-1/6} |f|_{A_1(D)};$$

в 1999 г. Конягин и Темляков [2] улучшили эту оценку:

$$\|f - G_m(f)\| \leq 4m^{-11/62} |f|_{A_1(D)}.$$

С другой стороны, в 1996 г. Девором и Темляковым [1] построен пример, когда

$$\|f - G_m(f)\| \geq \frac{1}{2} |f|_{A_1(D)} m^{-1/2}, \quad m \geq 4;$$

Темляков и Лившиц [3] построили пример, когда

$$\|f - G_m(f)\| \geq C |f|_{A_1(D)} m^{-0.27}.$$

Здесь и далее через C обозначим положительные абсолютные константы. В данной работе мы, развивая идеи [2], улучшаем оценку на скорость сходимости. При этом используются неравенства для коэффициентов жадных алгоритмов и строятся их непрерывные аналоги (дифференциально-разностные неравенства для функций), после чего оценивается максимально возможный рост решений этих неравенств. Будет доказана

ТЕОРЕМА 1. Для любого словаря D и любого элемента $f \in A_1(D)$ верна оценка

$$\|f - G_m(f, D)\| \leq C |f|_{A_1(D)} m^{-\gamma/(2(2+\gamma))},$$

где γ — корень уравнения $h(x) = 0$,

$$h(x) = (1+x)^{1/(2+x)} \left(1 + \frac{1}{1+x} \right) - 1 - \frac{1}{x},$$

на отрезке $[1, 1.5]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для сравнения $11/62 = 0.177\dots$, а $\gamma/(2(\gamma+2)) = 0.182\dots$. В качестве константы C можно взять $C = 1.7$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Недавно Лившиц анонсировал улучшение оценки снизу до $\|f - G_m(f)\| \geq C |f|_{A_1(D)} m^{-0.23}$ (устное сообщение). Таким образом, на данный момент отношение между оценкой сверху и оценкой снизу меньше, чем $Cm^{0.05}$.

Доказательство теоремы. Пусть

$$\begin{aligned} f_m &= R_m(f), & a_m(f) &= \|f_m\|^2, & d(f) &= |(f, g(f))|, \\ d_m &= d(f_m), & b_0 &= |f|_{A_1(D)}, & b_{m+1} &= b_m + d_m. \end{aligned}$$

Будем использовать неравенства, доказанные в [1]:

$$a_m b_m^{-2} \leq m^{-1}, \tag{1}$$

$$|f_m|_{A_1(D)} \leq b_m, \tag{2}$$

и неравенство, доказанное в [2]:

$$|(u, v)| \leq d(u) |v|_{A_1(D)}. \tag{3}$$

ЛЕММА 1. Уравнение $h(x) = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[1, 1.5]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $h(1) < 0$, $h(1.5) > 0$ и $h'(x) > 0$ при $x \in [1, 1.5]$, из чего следует утверждение леммы.

В силу (3) имеем

$$|(f_l, f_k)| \leq d(f_l) \|f_k\|_{A_1(d)} \leq d_l b_k.$$

С другой стороны, при $l \geq k$ имеем

$$|(f_l, f_k)| = \left| \left(f_k - \sum_{j=k}^{l-1} (f_j, g(f_j)) g(f_j), f_k \right) \right| \geq a_k - d_k \sum_{j=k}^{l-1} d_j = a_k - d_k (b_l - b_k).$$

Получили неравенство

$$d_l \geq \frac{a_k - d_k (b_l - b_k)}{b_k}. \quad (4)$$

Рассмотрим функции $A(t)$ и $B(t)$, где $t \geq 0$, определенные следующим образом: в точках $t = n$ положим $A(t) = a_n$, $B(t) = b_n$, и пусть A и B линейны на отрезках $[n, n+1]$. Тогда на отрезке $[n, n+1]$ имеем

$$B'(t) = d_n, \quad A'(t) = -d_n^2 = -(B'(t))^2.$$

Сделаем замену переменных $x = B(t)$, и пусть $A = f(B)$; тогда $f'_x(x) = -B'_t(t)$, где в точках вида $x = B(n)$ рассматривается правая производная.

ЛЕММА 2. Функция $f(t)$ удовлетворяет неравенству

$$f'(t_2) \leq \frac{-f(t_1) - f'(t_1)(t_2 - t_1)}{t_1}, \quad t_1 \leq t_2. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $t_1 = b_k, t_2 = b_l$ неравенство следует из (4). Пусть $t_2 \in [b_k, b_{k+1}]$, $k \geq l$. Тогда

$$b_l f'(t_2) \leq -f(b_l) - f'(b_l)(t_2 - b_l) - f'(b_l)(b_k - t_2) \leq -f(b_l) - f'(b_l)(t_2 - b_l),$$

так как f линейна на $[b_k, b_{k+1}]$ и $f'(b_l)(b_k - t_2) \geq 0$.

Аналогично, для $t_1 \in [b_l, b_{l+1}]$ имеем

$$-f(b_l) - f'(t_1)(t_2 - b_l) \geq t_1 f'(t_2) + (b_l - t_1) f'(t_2) \geq t_1 f'(t_2),$$

так как $(b_l - t_1) f'(t_2) \geq 0$. Далее,

$$t_1 f'(t_2) \leq -f(t_1) + f(t_1) - f(b_l) - f'(t_1)(t_2 - t_1) + f'(t_1)(b_l - t_1) = -f(t_1) - f'(t_1)(t_2 - t_1),$$

так как $f(t_1) - f(b_l) = f'(t_1)(t_1 - b_l)$. Лемма доказана.

Итак мы получили неравенство (5). Найдем максимальное γ такое, что функция $f(t) = t^{-\gamma}$ удовлетворяет этому неравенству. Подставив в (5), получим, что γ — корень уравнения $h(x) = 0$, причем при этом γ неравенство обращается в равенство только при $t_2 = t_1 t_0$, где $t_0 = (1 + \gamma)^{1/(2+\gamma)}$. Сделаем замену переменных $t = e^\tau$. Пусть $g(\tau) = f(e^\tau) e^{\gamma\tau}$. Тогда (5) при $\tau_1 = \tau_2$ примет вид

$$g'(\tau) + g(\tau) \leq 0, \quad (6)$$

а при $\tau_2 - \tau_1 = \tau_0$, где

$$\tau_0 = \ln t_0 = \frac{\ln(1 + \gamma)}{2 + \gamma},$$

получим

$$U \tau_0 g'(\tau + \tau_0) + V \tau_0 g'(\tau) \leq g(\tau + \tau_0) - g(\tau), \quad (7)$$

где

$$U = \frac{1}{\gamma \tau_0}, \quad V = \frac{e^{\tau_0} - 1}{\tau_0 \gamma e^{-\tau_0} - \gamma \tau_0}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Функция $g(\tau)$ ограничена на $[0, +\infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c_1 = \max g(t)$ на отрезке $[0, \tau_0]$. Предположим, что существует $\tau \in [\tau_0, +\infty]$ такое, что

$$g(\tau) > \frac{Uc_1 + Vc_1}{U - 1}.$$

Учитывая, что $U > 1$, $V > 0$ и, стало быть, $(Uc_1 + Vc_1)/(U - 1) > 0$, мы выводим существование такого $T > 0$, что

$$\max_{\tau \in [0, T + \tau_0]} g(\tau) = g(T + \tau_0).$$

Проинтегрируем неравенство (7) по отрезку $[0, T]$ и, обозначив $G(\tau) = \int_0^\tau g(\tau) d\tau$, получим

$$U\tau_0(g(T + \tau_0) - g(\tau_0)) + V\tau_0(g(T) - g(0)) \leq G(T + \tau_0) - G(\tau_0) - G(T)$$

или после преобразований

$$0 \leq -U\tau_0g(T + \tau_0) + U\tau_0g(\tau_0) + V\tau_0g(0) + G(T + \tau_0) - G(T) - G(\tau_0).$$

Заметим, что $G(T + \tau_0) - G(T) \leq \tau_0g(T + \tau_0)$. Следовательно,

$$0 \leq (1 - U)\tau_0g(T + \tau_0) + Uc_1\tau_0 + Vc_1\tau_0 < (-Uc_1 - Vc_1)\tau_0 + Uc_1\tau_0 + Vc_1\tau_0 = 0.$$

Получили противоречие. Тем самым, предложение доказано.

Из доказательства предложения 1 видно, что

$$\max_{\tau \in [0, +\infty)} g(\tau) \leq C, \quad \text{где } C = c_1 \frac{Uc_1 + Vc_1}{U - 1}, \quad c_1 = \max_{\tau \in [0, +\tau_0]} g(\tau).$$

Оценим константу c_1 . Из неравенства (6) вытекает, что

$$\ln g(\tau) \leq \tau(\gamma - 1) + \ln g(0).$$

Учитывая условие $g(0) \in [0, 1]$, мы получаем

$$g(\tau) \leq g(0)e^{\tau(\gamma-1)} \leq e^{\tau(\gamma-1)}.$$

Итак, $c_1 \leq e^{\tau_0(\gamma-1)}$.

Вернувшись к функции f , получим неравенство

$$f(t) \leq \frac{e^{\tau_0(\gamma-1)}(U + V)}{U - 1} t^{-\gamma}.$$

В точках вида b_k имеем

$$a_k b_k^\gamma \leq \frac{e^{\tau_0(\gamma-1)}(U + V)}{U - 1}.$$

Воспользовавшись неравенством (3), получим

$$a_k \leq \left(\frac{e^{\tau_0(\gamma-1)}(U + V)}{U - 1} \right)^{2/(2+\gamma)} m^{-\gamma/(\gamma+2)}.$$

Подставив значения τ_0 , γ , U , V , легко убедиться, что $C < 1.7$. Вспомнив, что $a_k = \|f_k\|^2$, мы завершаем доказательство теоремы 1.

В [4] рассматривается следующее обобщение чистого жадного алгоритма. Фиксируется число $\beta \in (0, 1]$. Элементы $G_m(f)$ и $R_m(f)$ определяются как

$$G_m(f) = G_{m-1}(f) + \beta G(R_{m-1}(f)), \quad R_m(f) = f - G_m(f) = R(R_{m-1}(f)).$$

При $\beta = 1$ мы получаем чистый жадный алгоритм.

Теорему 1 можно перенести на случай произвольного $\beta \in (0, 1]$: для любого элемента $f \in A_1(D)$ верна оценка

$$\|f - G_m(f)\| \leq C|f|_{A_1(D)} m^{-\gamma(\beta)/(2(2+\gamma(\beta)))},$$

где

$$\gamma(\beta) = \min \left\{ x > 1 : (1+x)^{1/(2+x)} \left(1 + \frac{1}{1+x} \right) = 1 + \frac{2-\beta}{x} \right\}.$$

Заметим, что функция $\gamma(\beta)$ убывает на $[0, 1]$. При этом

$$\frac{\gamma(0)}{2(2+\gamma(0))} = 0.305 \dots$$

Сравнение этого результата с [3] показывает, что при малых β скорость сходимости жадного алгоритма, вообще говоря, быстрее, чем при $\beta = 1$.

В заключение хочу поблагодарить С. В. Конягина и В. Ю. Протасова за полезные обсуждения проблемы и многочисленные ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. DeVore R. A., Temlyakov V. N. // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 173–187.
2. Konyagin S. V., Temlyakov V. N. // East J. Approx. 1999. V. 5. № 4. P. 493–499.
3. Livshitz E. D., Temlyakov V. N. // Constructive Approx. 2003. V. 19. № 4. P. 509–523.
4. Temlyakov V. N. Greedy expansions in Banach spaces // Research report 2003:06. Columbia, SC: Dept. Math. Univ. South Carolina, 2003.