Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, О примере перехода от хаоса к интегрируемости в магнитных геодезических потоках, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 632–634

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:07:39

О ПРИМЕРЕ ПЕРЕХОДА ОТ ХАОСА К ИНТЕГРИРУЕМОСТИ В МАГНИТНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

И. А. Тайманов

В этой статье мы укажем пример вещественно-аналитической гамильтоновой системы, чьи ограничения на различные уровни энергии являются ановскими потоками при $E > E_{\text{сг}}$, имеют только транзитивные траектории при $E = E_{\text{сг}}$ и аналитически интегрируемы при $E < E_{\text{сг}}$, где $E_{\text{сг}}$ – некоторый критический уровень энергии. Это дает простой пример перехода от хаоса к интегрируемости (на заданном уровне энергии) при переходе энергии через критический уровень.

Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть M – замкнутое ориентированное двумерное многообразие постоянной кривизны $K = -1$ и $d\mu$ – форма объема, отвечающая этой метрике. Тогда движение заряженной частицы на M в магнитном поле, заданном формой $d\mu$, является вполне интегрируемым посредством вещественно-аналитических интегралов движения на поверхностях уровня энергии $E < 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Хедлунд доказал, что на поверхности уровня энергии $E = 1/2$ любая траектория этого потока (магнитного геодезического потока) транзитивна, т.е. всюду плотна [1]. На каждом уровне энергии $E > 1/2$ магнитный геодезический поток сопряжен геодезическому потоку финслеровой метрики, который является ановским потоком [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00403, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-2185.2003.1, и Института Макса Планка по математике в Бонне.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если нам дана гамильтонова система на $2n$ -мерном симплектическом многообразии, мы говорим, что она *интегрируема на заданном уровне энергии* $\{H = E\}$, если существует $(n-1)$ интегралов движения $I_1, \dots, I_{n-1}$ таких, что они определены в некоторой окрестности этого уровня, где они коммутируют по отношению к скобке Пуассона, и функционально независимы на подмножестве полной меры уровня энергии $\{H = E\}$ (см., например, [3], [4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Следуя работе Новикова [5], напомним, что движение заряженной частицы на римановом многообразии M в магнитном поле, заданном некоторой замкнутой 2-формой F , описывается уравнениями Эйлера–Лагранжа для лагранжиана

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + A_i \dot{x}^i,$$

где g_{ik} – метрический тензор и 1-форма A определяется локально как $A = d^{-1}F$, т.е. траектории – это экстремали функционала действия $\int L dt$. Если форма F точна, мы говорим, что магнитное поле *точно*, и в этом случае форма A определена глобально. Так как магнитное поле входит в уравнения Эйлера–Лагранжа посредством формы F , эти уравнения и их решения (магнитные геодезические) не зависят от выбора формы $A = d^{-1}F$. В частности, это приводит к введению многозначных функционалов на пространствах замкнутых кривых при поиске замкнутых экстремалей с использованием аналогов теории Морса [5].

Магнитное поле не вносит вклад в энергию

$$E = \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L = \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k.$$

Поэтому в гамильтоновом формализме магнитный геодезический поток описывается уравнениями Гамильтона на кокасательном расслоении T^*M с тем же самым гамильтонианом

$$H(x, p) = \frac{1}{2} g^{ik} p_i p_k,$$

что и у геодезического потока, но по отношению к другой симплектической структуре. В этом случае она определяется замкнутой формой $\omega = dp_i \wedge dx^i + \pi^* F$, где $\pi: T^*M \rightarrow M$ – естественная проекция.

На заданном уровне энергии E магнитные геодезические являются экстремальными другого функционала $\int L_E dt$ с лагранжианом L_E вида

$$L_E(x, \dot{x}) = \sqrt{2E g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} + A_i \dot{x}^i = \sqrt{2E} \left(\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} + \frac{1}{\sqrt{2E}} A_i \dot{x}^i \right). \quad (1)$$

Рассмотрим магнитный геодезический поток, отвечающий гиперболической метрике, т.е. метрике постоянной отрицательной кривизны $K = -1$, и ее форме объема dm на компактной поверхности. Из (1) следует, что в этом случае магнитные геодезические на уровне энергии E являются линиями постоянной геодезической кривизны

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{2E}},$$

которые проходятся в направлении часовой стрелки. Эти линии описываются как решения уравнения Эйлера–Лагранжа для многозначного лагранжиана

$$\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} + \frac{1}{\sqrt{2E}} A_i^\alpha \dot{x}^i,$$

где $dA^\alpha = F$ в области U_α с $[F|_{U_\alpha}] = 0 \in H^2(U_\alpha, \mathbb{R})$ (мы можем взять в качестве U_α дополнение к любой точке, которая не лежит на линии).

Хедлунд описал все линии постоянной геодезической кривизны на гиперболической плоскости в [1]. Их классификация такова. Реализуем гиперболическую плоскость как диск $D = \{|z| < 1\}$ (на комплексной плоскости $\mathbb{C}$) с метрикой

$$ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Группа изометрий есть $SU(1, 1)/\pm 1$, и ее действие имеет вид

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(1, 1).$$

Линии постоянной геодезической кривизны k_g – это

- при $k_g = 0$: геодезические, которые в евклидовой метрике не являются дугами окружностей, ортогональными к ∂D ;
- при $0 < k_g < 1$: гиперциклы, которые являются дугами евклидовых окружностей, пересекающимися ∂D в паре различных точек; все точки на гиперцикле находятся на одинаковом расстоянии (в гиперболической метрике) от геодезической с теми же концами на ∂D ;
- при $k_g = 1$: орициклы, которые суть евклидовы окружности, касающиеся изнутри границы ∂D ;
- при $k_g > 1$: гиперболические окружности, имеющие вид евклидовых окружностей, лежащих внутри круга D .

На связь этой работы Хедлунда с магнитными геодезическими потоками указал Гинзбург [6].

Каждое компактное гиперболическое ориентированное двумерное многообразие M является фактор-пространством D по отношению к действию некоторой дискретной подгруппы $\Gamma \subset SU(1, 1)/\pm 1$: $M = D/\Gamma$.

Рассмотрим магнитный геодезический поток на M для поля $F = d\mu$ на уровне энергии $E < 1/2$. На D , универсальном накрытии многообразия M , подъем траектории γ является гиперболической окружностью с (гиперболическим) центром в точке x_γ . Очевидно, что на заданном уровне энергии E каждой точке $x \in D$ отвечает единственная гиперболическая окружность постоянной геодезической кривизны $k_g = 1/\sqrt{2E}$ с центром в точке x . Более того, каждой траектории на D отвечает ее гиперболический центр x_γ , который сохраняется потоком. Преобразования из $SU(1, 1)/\pm 1$ переводят гиперболические окружности в гиперболические окружности, отображая центры в центры. Следовательно, каждой вещественно-аналитической функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ отвечает вещественно-аналитический интеграл движения

$$I_f(x, p) = f(x_\gamma),$$

где x_γ – гиперболический центр некоторого подъема траектории γ , проходящей через точку $(x, \dot{x}) \in TM$. Здесь мы отождествляем точку x_γ с ее проекцией в $M = D/\Gamma$ и $p_i = g_{ik}\dot{x}^k$. Таким образом, мы имеем интеграл движения I_f , определенный на множестве $\{E < 1/2\}$. Этот интеграл I_f порождает гамильтонов поток, коммутирующий с магнитным геодезическим потоком. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Возьмем пару вещественно-аналитических функций $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$, которые функционально независимы почти всюду, и построим два независимых интеграла движения I_f и I_g . Эти интегралы не коммутируют по отношению к скобке Пуассона, но, фиксируя их общие значения, мы выделяем изолированные траектории потока.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Дополнительный интеграл, указанный в доказательстве теоремы, аналитический зависит от параметра $E < E_{\text{сг}}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hedlund G. A. // Duke Math. J. 1936. V. 2. P. 530–542.
2. Contreras G., Iturriaga R., Paternain G. P., Paternain M. // Geom. Funct. Anal. 1998. V. 8. P. 788–809.
3. Тайманов И. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 429–435.
4. Bolsinov A. V., Taimanov I. A. // Invent. Math. 2000. V. 140. P. 639–650.
5. Новиков С. П. // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49.
6. Ginzburg V. L. // Math. Z. 1996. V. 223. P. 397–409.