Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Островский, Моменты интегрально-равномерной нормы полиномов со случайными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:23:40

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

МОМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНО-РАВНОМЕРНОЙ НОРМЫ ПОЛИНОМОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. И. Островский

1. Введение. Обозначения. Постановка задачи. Пусть (X, μ) – измеримое пространство с нормированной мерой μ , $\mu(X) = 1$, $f_k(x)$ – измеримые ограниченные числовые функции, определенные на X :

$$g_k = \sup_{x \in X} |f_k(x)| < \infty.$$

Кашин и Цафрири в [1] ввели интересную так называемую *интегрально-равномерную норму* на пространстве измеримых функций $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$:

$$\|f\|_{m, \infty} = \int_X \int_X \cdots \int_X \max_{i=1, 2, \dots, m} |f(x_i)| \prod_{i=1}^m \mu(dx_i),$$

изучили ее и применили в теории функций. В частности, были получены нижние оценки математического ожидания интегрально-равномерных норм полиномов со случайными коэффициентами. Автору настоящей заметки представляется, что указанная норма найдет также применение в теории случайных процессов и полей. Например, в статье [2], в частности, исследованы нормы $E\|T(\cdot)\|_{m, \infty}$ для случайных полиномов

$$T = T(x) = \sum_{k=1}^n \xi_k f_k(x),$$

$\{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, – независимые в совокупности центрированные случайные величины, определенные на вероятностном пространстве $[\Omega, A, P]$ с математическим ожиданием E .

Здесь и далее

$$\sum_k = \sum_{k=1}^n, \quad \max_j = \max_{j=1, 2, \dots, m}, \quad \max_s = \max_{s=1, 2, \dots, d},$$

$$\prod_j = \prod_{j=1, 2, \dots, m}, \quad \prod_s = \prod_{s=1, 2, \dots, d},$$

d – порядок оцениваемого момента, $|\eta|_p = E^{1/p}|\eta|^p$, $\log = \ln$, C, C_j – несущественные в данном контексте положительные конструктивные конечные постоянные, не зависящие от m, n, x, λ, ω .

Цель настоящей заметки – обобщить оценку работы [2] в двух направлениях: на случай величин $\{\xi_k\}$ с более легкими или более тяжелыми хвостами и получить верхние оценки для высших моментов. При этом ради экономии места мы не станем формулировать результаты в максимальной степени общности.

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторого $p \geq 2$ $\nu(p) = \max_k |\xi_k|_p < \infty$ ($\{\xi_k\}$ – независимые в совокупности случайные величины). Тогда для любого числа d , меньшего или равного $[p]$, верно неравенство

$$\|T\|_{m,\infty}|_d \leq \frac{\sqrt{2} p \nu(p) \sqrt{\sum_k g_k^2} m^{1/p}}{\log p}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Ляпунова достаточно рассмотреть случай целого d . Имеем, применяя неравенство Гёльдера,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|T\|_{m,\infty}^d &= \int_{X^{dm}} \mathbb{E} \prod_s \max_j |T(x_{j,s})| \prod_s \prod_j \mu(dx_{j,s}) \\ &\leq \int_{X^{dm}} \prod_s \left| \max_j |T(x_{j,s})| \right|_d \prod_s \prod_j \mu(dx_{j,s}). \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно неравенствам Ляпунова и Пизье [3]

$$\left| \max_j |T(x_{j,s})| \right|_d \leq \left| \max_j |T(x_{j,s})| \right|_p \leq m^{1/p} \max_j |T(x_{j,s})|_p.$$

Далее применяем моментные оценки сумм независимых случайных величин (см., например, [4]):

$$|T(x_{j,s})|_p = \left| \sum_k \xi_k f_k(x_{j,s}) \right|_p \leq \frac{\sqrt{2} p \nu(p) \sqrt{\sum_k f_k^2(x_{j,s})}}{\log p} \leq \frac{\sqrt{2} p \nu(p) \sqrt{\sum_k g_k^2}}{\log p}.$$

Подставляя полученные оценки в (2), интегрируя и извлекая корень степени d , получаем утверждение (1).

Рассмотрим теперь случайные величины $\{\xi_k\}$ с экспоненциально убывающими хвостами распределений. Именно, введем пространство $G(q)$, $q > 1$, состоящее из центрированных случайных величин $\{\eta_j\}$, определенных на нашем вероятностном пространстве и удовлетворяющих условию

$$\max(P(\eta > t), P(\eta < -t)) \leq \exp\left(-\left(\frac{t}{K}\right)^q\right), \quad \exists K \in (0, \infty). \quad (3)$$

В [5, с. 37] доказано, что относительно нормы

$$\|\eta\|_q = \sup_{l \geq 2} |\eta|_l l^{-1/q}$$

$G(q)$ является банаховым пространством, так что неравенство (3) и оценка $\forall l \geq 2 \implies |\eta|_l \leq CK l^{1/q}$ эквивалентны. Там же на с. 48 выведен и аналог неравенства Пизье:

$$\left\| \max_{j=1,2,\dots,m} |\eta_j| \right\|_q \leq C(q)(1 + \log m)^{1/q} \max_j \|\eta_j\|_q, \quad (4)$$

а на с. 51 получены экспоненциальные оценки распределений сумм независимых величин класса $G(q)$, причем они, равно как и оценки (4), *неулучшаемы*. (На самом деле в [5] содержатся несколько более общие факты).

Применяя указанную технику и действуя аналогично доказательству теоремы 1, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторой константы $K \in (0, \infty)$ независимые величины $\{\xi_k\}$ удовлетворяют неравенству (3) с $q > 1$. Обозначим $r = \min(q, 2)$. Утверждается, что для любого $d \geq 1$

$$E\|T\|_{m,\infty}^d \leq C(q)^d K^d d^{d/r} (1 + \log m)^{d/r} \left(\sum_k g_k^2 \right)^{d/2}.$$

ПРИМЕР. Пусть величины $\{\xi_k\}$ независимы, центрированы и для некоторых постоянных $C > 0$, $q > 1$

$$\sup_k P(|\xi_k| > t) \leq \exp(-Ct^q), \quad t > 0.$$

Положим $r = \min(q, 2)$, $N = N(d, q, m) = d^{1/r} (1 + \log m)^{1/r} \sqrt{\sum_k g_k^2}$, $d \geq 1$. Согласно теореме 2 имеем

$$E^{1/d} \left\| \sum_k \xi_k f_k \right\|_{m,\infty}^d \leq C(q) K N(d, q, m)$$

или, что то же самое,

$$P\left(\frac{\|T\|_{m,\infty}}{KN(1, q, m)} > t\right) \leq C_1 \exp(-Ct^r), \quad t > 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kashin B., Tzafriri L. // East J. Approx. 1995, V. 1. № 3. P. 373–377. 2. Григорьев П. Г. // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 950–954. 3. Pizier G. // Sémin. analyse fonctionnelle. 1980. Exр. 13. P. 23–26. 4. Ибрагимов Р., Шарахмедов Ш. // Теория вероятн. и ее примен. 1997. Т. 42. № 2. С. 341–350. 5. Островский Е. И. Экспоненциальные оценки для случайных полей и их применения. Обнинск: ОИАТЭ, 1999.

Институт индустриальной математики, Израиль

Поступило
15.10.2001