Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Баштова, Виртуальное время ожидания в одной системе с марковски-модулированным входным потоком, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 945–948

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:54:09

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВИРТУАЛЬНОЕ ВРЕМЯ ОЖИДАНИЯ В ОДНОЙ СИСТЕМЕ С МАРКОВСКИ-МОДУЛИРОВАННЫМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ

Е. Е. Баштова

1. Введение. Рассматривается одноканальная система массового обслуживания, в которой входной поток является частным случаем процесса Кокса или дважды стохастического пуассоновского процесса (ДСПП). Определения и основные свойства ДСПП представлены в книге Гранделла [1], а многие результаты (различные оценки, неравенства, результаты о монотонности), касающиеся систем с ДСПП в качестве входного потока получены Рольски [2]–[4].

Мы будем изучать процесс виртуального времени ожидания. Существование предельного стационарного распределения для этого процесса при некотором условии на загрузку системы вытекает из статьи Афанасьевой [5], а здесь выведена явная формула для предельной функции распределения в терминах преобразования Лапласа–Стилтьеса и дана асимптотика ее поведения в условиях высокой загрузки.

2. Описание системы. Следуя [1], дадим строгое описание входного потока. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ задан марковский процесс $\{U(t), t \geq 0\}$ с двумя состояниями и интенсивностями переходов

$$\begin{aligned} P(U(t + \Delta t) = 2 | U(t) = 1) &= \alpha \Delta t + o(\Delta t), \\ P(U(t + \Delta t) = 1 | U(t) = 2) &= \beta \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

а на вероятностном пространстве $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ задан стандартный пуассоновский процесс $\{N^*(t), t \geq 0\}$, не зависящий от $U(t)$.

Пусть к тому же заданы функции

$$\lambda(t) = \lambda_1 \mathbf{I}_{\{U(t)=1\}} + \lambda_2 \mathbf{I}_{\{U(t)=2\}} \quad \text{и} \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y) dy.$$

Тогда на вероятностном пространстве $(\Omega_1 \times \Omega_2, \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2), P_1 \times P_2)$ можно задать процесс $N(t) = N^*(\Lambda(t))$, который и будет входным потоком в нашей системе.

Времена обслуживания $\{S_i\}_1^\infty$ независимы и одинаково распределены по некоторому закону $B(x)$, не зависящему от времени, имеют среднее b и второй момент b_2 .

Коэффициент загрузки системы определяется как

$$\rho = \frac{\beta \lambda_1 + \alpha \lambda_2}{\alpha + \beta} b.$$

3. Вывод формулы предельного стационарного распределения. Обозначим через $W(t)$ процесс виртуального времени ожидания в описанной системе. Пусть

$$\mathcal{H}(t, x) = P(W(t) \leq x),$$

$$\mathcal{H}_1(t, x) = P(W(t) \leq x, U(t) = 1), \quad \mathcal{H}_2(t, x) = P(W(t) \leq x, U(t) = 2).$$

Введем функции $H(x)$, $H_1(x)$ и $H_2(x)$ следующим образом:

$$H(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}(t, x), \quad H_1(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}_1(t, x), \quad H_2(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}_2(t, x).$$

Для марковского процесса $(W(t), U(t))$ аналогично тому, как получено уравнение Такача [6] для одноканальной системы с пуассоновским входящим потоком, выписывается следующая система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}_1(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}_1(t, x)}{\partial x} = \mathcal{H}_2(t, x)\beta - (\lambda_1 + \alpha)\mathcal{H}_1(t, x) + \lambda_1 \int_0^x B(x-z)\mathcal{H}_1(t, dz), \\ \frac{\partial \mathcal{H}_2(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}_2(t, x)}{\partial x} = \mathcal{H}_1(t, x)\alpha - (\lambda_2 + \beta)\mathcal{H}_2(t, x) + \lambda_2 \int_0^x B(x-z)\mathcal{H}_2(t, dz). \end{cases} \quad (1)$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, получаем систему уравнений для предельных функций:

$$\begin{cases} H_2(x)\beta - (\lambda_1 + \alpha)H_1(x) + \lambda_1 \int_0^x B(x-z)H_1(dz) = 0, \\ H_1(x)\alpha - (\lambda_2 + \beta)H_2(x) + \lambda_2 \int_0^x B(x-z)H_2(dz) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим

$$b^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} B(dx), \quad H^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} H(dx), \quad H_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} H_i(dx), \quad i = 1, 2.$$

Перейдем к преобразованию Лапласа–Стилтьеса в системе (2):

$$\begin{cases} H_1^*(s)(s - (\alpha + \lambda_1(1 - b^*(s)))) + \beta H_2^*(s) - sH_1(0) = 0, \\ H_2^*(s)(s - (\beta + \lambda_2(1 - b^*(s)))) + \alpha H_1^*(s) - sH_2(0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решим систему (3) относительно $H_1^*(s)$ и $H_2^*(s)$:

$$\begin{cases} H_1^*(s) = \frac{sH_1(0)(s - (\beta + \lambda_2(1 - b^*(s)))) - s\beta H_2(0)}{(s - (\beta + \lambda_2(1 - b^*(s))))(s - (\alpha + \lambda_1(1 - b^*(s)))) - \alpha\beta}, \\ H_2^*(s) = \frac{sH_2(0)(s - (\alpha + \lambda_1(1 - b^*(s)))) - s\alpha H_1(0)}{(s - (\beta + \lambda_2(1 - b^*(s))))(s - (\alpha + \lambda_1(1 - b^*(s)))) - \alpha\beta}. \end{cases} \quad (4)$$

Сложим оба уравнения:

$$H^*(s) = \frac{s((1 - \rho)(s - (\alpha + \beta)) - (\lambda_2 H_1(0) + \lambda_1 H_2(0))(1 - b^*(s)))}{(s - (\beta + \lambda_2(1 - b^*(s))))(s - (\alpha + \lambda_1(1 - b^*(s)))) - \alpha\beta} = \frac{sF(s)}{sG(s)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В последней записи учтено, что $H(0) = 1 - \rho$, так как $H^*(0) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ получается известная формула для системы с пуассоновским входящим потоком

$$H^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda(1-b^*(s))}.$$

Функция $H^*(s)$ является аналитической на полупрямой $\mathbb{R}_+$, поэтому все нули знаменателя на этом множестве должны совпадать с нулями числителя. Функция $G(s)$ имеет хотя бы один корень на множестве $\mathbb{R}_+$ в силу того, что $G(0) = (\alpha + \beta)/(\rho - 1) < 0$, при $s \rightarrow +\infty$ функция $G(s) \rightarrow +\infty$, а функция $F(s)$ имеет единственный корень на этом множестве, поэтому $G(s)$ тоже имеет единственный корень на $\mathbb{R}_+$, совпадающий с корнем $F(s)$. Обозначим этот единственный корень s_0 и найдем константы $H_1(0)$ и $H_2(0)$ из соотношения $F(s_0) = 0$, учитывая, что $H_1(0) + H_2(0) = 1 - \rho$, имеем

$$\begin{aligned} H_1(0) &= (1-\rho) \frac{(s_0 - (\alpha + \beta)) - \lambda_1(1 - b^*(s_0))}{(\lambda_2 - \lambda_1)(1 - b^*(s_0))}, \\ H_2(0) &= (1-\rho) \frac{(s_0 - (\alpha + \beta)) - \lambda_2(1 - b^*(s_0))}{(\lambda_1 - \lambda_2)(1 - b^*(s_0))}. \end{aligned}$$

Значит,

$$H^*(s) = \frac{s(1-\rho)((s - (\alpha + \beta))(1 - b^*(s_0)) - (s_0 - (\alpha + \beta))(1 - b^*(s)))}{(1 - b^*(s_0))((s - (\beta + \lambda_2(1 - b^*(s))))(s - (\alpha + \lambda_1(1 - b^*(s)))) - \alpha\beta]}.$$

4. Условия высокой загрузки. В этом пункте будем считать нашу систему элементом последовательности $\{S_\varepsilon\}$ систем с общим классом функций распределения времен обслуживания и одинаковой (аналогичной рассматривавшейся до сих пор) конструкцией входного потока. Входной поток системы S_ε зависит от параметра ε таким образом, что $\lambda^\varepsilon(t) = \varepsilon\lambda(t)$ и $\varepsilon \rightarrow \rho^{-1}$.

ТЕОРЕМА. В описанных условиях

$$\begin{aligned} H^\varepsilon\left(\frac{x}{1-\varepsilon\rho}\right) &\rightarrow 1 - e^{x/\sigma}, \\ \sigma &= \frac{b_2}{2b} - \frac{1}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{\lambda_1 b}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2 b}{\rho}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $s_\varepsilon = s(1 - \varepsilon\rho)$. Из формул (4) следует, что при $\varepsilon \rightarrow \rho^{-1}$

$$\begin{aligned} H_1^{\varepsilon*}(s_\varepsilon) &= \frac{H_1^\varepsilon(0)(s_\varepsilon - (\beta + \varepsilon\lambda_2 b s_\varepsilon)) - \beta H_2^\varepsilon(0) + o(s_\varepsilon)}{s_\varepsilon - \varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2) b s_\varepsilon - (\alpha + \beta) + \varepsilon(\beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(b - \frac{b_2}{2}s_\varepsilon) + \varepsilon^2\lambda_1\lambda_2 b^2 s_\varepsilon + o(s_\varepsilon)}, \\ H_2^{\varepsilon*}(s_\varepsilon) &= \frac{H_2^\varepsilon(0)(s_\varepsilon - (\alpha + \varepsilon\lambda_1 b s_\varepsilon)) - \alpha H_1^\varepsilon(0) + o(s_\varepsilon)}{s_\varepsilon - \varepsilon(\lambda_1 + \lambda_2) b s_\varepsilon - (\alpha + \beta) + \varepsilon(\beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(b - \frac{b_2}{2}s_\varepsilon) + \varepsilon^2\lambda_1\lambda_2 b^2 s_\varepsilon + o(s_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} H_1^{\varepsilon*}(s(1-\varepsilon\rho)) &\rightarrow \frac{\beta}{\alpha + \beta} \left(1 + s \left(\frac{b_2}{2b} - \frac{1}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{\lambda_1 b}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2 b}{\rho}\right)\right)\right)^{-1}, \\ H_2^{\varepsilon*}(s(1-\varepsilon\rho)) &\rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(1 + s \left(\frac{b_2}{2b} - \frac{1}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{\lambda_1 b}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2 b}{\rho}\right)\right)\right)^{-1}, \\ H^{\varepsilon*}(s(1-\varepsilon\rho)) &\rightarrow \left(1 + s \left(\frac{b_2}{2b} - \frac{1}{\alpha + \beta} \left(1 - \frac{\lambda_1 b}{\rho}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2 b}{\rho}\right)\right)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grandell J. Doubly Stochastic Poisson Processes. Lecture Notes in Math. V. 529. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976. 2. Rolski T. // Queueing Systems Theory Appl. 1989. V. 5. № 1–3. P. 113–129. 3. Rolski T. // Math. Oper. Res. 1986. V. 11. № 3. P. 442–450. 4. Bäuerle N., Rolski T. // J. Appl. Probab. 1998. V. 35. № 3. P. 741–747. 5. Афанасьева Л. Г. Стохастическая ограниченность циклических систем обслуживания // Проблемы устойчивости стохастических моделей. Труды семинара ВНИИСИ. М., 1989. 6. Tacsacz L. // Acta Math. Acad. Sci. Hungary. 1955. V. 6. P. 101–129.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.12.2003