Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Седаев, Ф. А. Сукочев, С. Лорд, Следы Конна–Диксмье, сингулярные симметричные функционалы и измеримые по Конну элементы, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 948–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:02:35

СЛЕДЫ КОННА–ДИКСМЬЕ, СИНГУЛЯРНЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ИЗМЕРИМЫЕ ПО КОННУ ЭЛЕМЕНТЫ

С. Лорд, А. А. Седаев, Ф. А. Сукочев

Работа продолжает исследование, начатое в [1]–[5]. Показано, что конструкция аномальных следов, примененная в [1], [2], может быть адекватно выражена с помощью конструкции сингулярных симметричных функционалов, разработанной в [4], [5]. Получено полное описание измеримых элементов, на которых все сингулярные симметричные функционалы из некоторого класса принимают одинаковые значения [1]. Этот результат существенно дополняет описание структуры множества измеримых операторов даже для специального случая, рассмотренного в [1]. Для естественных подмножеств множества сингулярных симметричных функционалов получены новые результаты об их нормирующих свойствах.

Мы будем оперировать с множеством Ω_∞ вогнутых функций $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ таких, что

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty,$$

и с множеством $\mathcal{K}$ неотрицательных возрастающих и непрерывных функций k таких, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $\kappa \in \mathcal{K}$. Говорят, что

- κ обладает *свойством D* относительно ψ (обозначается: $\kappa \in D(\psi)$), если $\psi(\kappa(t))/t$ есть невозрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция;
- κ удовлетворяет *условию R* относительно ψ (обозначается: $\kappa \in R(\psi)$), если

$$\text{F-lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(\kappa(n))}{\psi(\kappa(n+1))} = 1;$$

- κ есть *функция экспоненциального роста*, если существует $C > 0$ такое, что $\kappa(t+C) > 2\kappa(t)$ для всех $t > 0$.

Подмножество элементов $R(\psi)$ экспоненциального роста обозначается $R_{\text{exp}}(\psi)$.

Работа первого автора выполнена при поддержке Australian Research Council. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00146, и научно-исследовательской программы “Университеты России”, грант УР 04.01.051.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$. Тогда

1) $\text{R}_{\text{exp}}(\psi)$ непусто тогда и только тогда, когда

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1;$$

2) $\text{R}_{\text{exp}}(\psi)$ содержит функцию κ такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(\kappa(n))}{\psi(\kappa(n+1))} = 1$$

в том и только том случае, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1;$$

3) если $\kappa \in D(\psi)$, то $\kappa \in R(\psi)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(\kappa(n))}{\psi(\kappa(n+1))} = 1;$$

4) обратная функция ψ^{-1} будет экспоненциального роста тогда и только тогда, когда существуют $C, t_0 > 0$ такие, что $\psi'(t) \leq C/t$ для всех $t > t_0$.

Напомним обозначения из [4]. Пусть m – мера Лебега на $\mathbb{R}_+$ и x – измеримая, почти всюду конечная на $\mathbb{R}_+$ функция. Определим для x невозрастающую перестановку.

Пусть $\psi \in \Omega_\infty$. Положим

$$\phi(x)(t) := \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds, \quad t > 0,$$

и обозначим через $M(\psi)$ пространство Марцинкевича измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций x таких, что

$$\|x\|_{M(\psi)} := \sup_{t > 0} \phi(x)(t) = \|\phi(x)\|_\infty < \infty.$$

Замыкание $M(\psi) \cap L^1(\mathbb{R}_+)$ в $M(\psi)$ обозначается $M_1(\psi)$. Для любой $\psi \in \Omega_\infty$ имеем $M_1(\psi) \neq M(\psi)$. Определим на $M(\psi)$ полунорму Рисса $\rho_1(\cdot)$ по формуле [4, предложение 2.1]

$$\rho_1(x) := \inf \{ \|x - y\|_{M(\psi)} \mid y \in M_1(\psi) \} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \phi(x)(t).$$

Банахово пространство $(M(\psi), \|\cdot\|_{M(\psi)})$ есть пример симметричного (или перестановочно-инвариантного) пространства [6]. Пусть $M_+(\psi)$ означает конус положительных функций из $M(\psi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Положительный однородный функционал $f: M_+(\psi) \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется

(i) *симметричным*, если $f(x) \leq f(y)$ для всех $x, y \in M_+(\psi)$ таких, что

$$\int_0^t x^*(s) ds \leq \int_0^t y^*(s) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

(ii) *сосредоточенным на бесконечности и сингулярным*, если $f(|x|) = 0$ для всех $x \in M_1(\psi)$.

Если такой функционал является *аддитивным*, то он может быть продолжен по линейности до ограниченного линейного положительного функционала на $M(\psi)$. Пусть $M_+(\psi)_{\text{sym}, \infty}^*$ означает конус таких функционалов [4, §2]. Не всякое пространство Марцинкевича $M(\psi)$, $\psi \in \Omega_\infty$, допускает существование линейных сингулярных симметричных функционалов. Необходимые и достаточные условия были найдены в [3, теорема 3.4] (см. также теорему 3 и пункт 1) теоремы 1).

1. Мы обозначаем через $BL(\mathbb{N})$ множество банаховых пределов, т.е. множество линейных инвариантных относительно сдвига положительных функционалов L' на пространстве ℓ_∞ таких, что $L'(\mathbf{1}) = 1$. Аналогично через $BL(\mathbb{R}_+)$ мы обозначаем множество всех банаховых пределов L , определенных на пространстве $C_b(\mathbb{R}_+)$ всех ограниченных и непрерывных функций. Заметим, что все банаховы пределы обращаются в нуль на $C_0(\mathbb{R}_+)$ – подпространстве непрерывных и стремящихся к нулю функций.

Обозначим через $SC_b^*(\mathbb{R}_+)$ множество всех положительных линейных функционалов γ на $C_b(\mathbb{R}_+)$ таких, что $\gamma(\mathbf{1}) = 1$ и $\gamma(f) = 0$ для всех f из $C_0(\mathbb{R}_+)$.

Пусть C означает оператор чезаровского среднего, задаваемый равенством

$$C(g)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t g(s) ds \quad \text{для } g \in C_b(\mathbb{R}_+).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\gamma \in SC_b^*(\mathbb{R}_+)$. Положительный линейный функционал на $C_b(\mathbb{R}_+)$ вида $L_\gamma := \gamma \circ C$ мы назовем *пределом Чезаро–Банаха*. Пусть $CBL(\mathbb{R}_+)$ означает множество пределов Чезаро–Банаха на $C_b(\mathbb{R}_+)$.

Легко проверить, что L_γ инвариантен относительно сдвига и, значит, $CBL(\mathbb{R}_+) \subset BL(\mathbb{R}_+)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $\kappa \in \mathcal{K}$. Для $x \in M_+(\psi)$ и $L' \in BL(\mathbb{N})$ определим

$$f_{L', \kappa}(x) := L'(\{\phi_\kappa(x)(n)\}_{n=1}^\infty).$$

В [4] были найдены необходимые и достаточные условия на последовательность $\{\kappa(n)\}_{n=1}^\infty$ и функцию $\psi \in \Omega_\infty$, при выполнении которых $f_{L', \kappa}$ принадлежит $M_+(\psi)^*_{\text{sym}, \infty}$ для всех $L' \in BL(\mathbb{N})$. Естественнo ввести следующее обобщение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $\kappa \in \mathcal{K}$. Для $x \in M_+(\psi)$ и $L \in BL(\mathbb{R}_+)$ определим

$$f_{L, \kappa}(x) := L(\phi_\kappa(x)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$, $L \in BL(\mathbb{R}_+)$ и $L' \in BL(\mathbb{N})$. Если $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{K}$ таковы, что $\kappa_1 - \kappa_2$ ограничена, то $f_{L, \kappa_1}(x) = f_{L, \kappa_2}(x)$ и $f_{L', \kappa_1}(x) = f_{L', \kappa_2}(x)$ для всех $x \in M_+(\psi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложение 1 вводит понятие эквивалентности для функций $\kappa \in \mathcal{K}$, которое выражается в одинаковости функционалов $f_{L, \kappa}(x)$ на $M_+(\psi)$. Из предложения 1 легко следует, что для каждой $\kappa \in \mathcal{K}$ класс эквивалентности $[\kappa]$ содержит строго возрастающую обратимую кусочно-линейную и дифференцируемую функцию такую, что $\kappa(0) = 0$. Этот факт будет использован в теореме 4.

Пусть H есть $\mathbb{N}$ или $\mathbb{R}_+$. Обобщим понятие почти сходящейся последовательности [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $f \in C_b(H)$ называется *почти сходящейся* (на бесконечности) относительно $V \subset BL(H)$, если

$$L_1(f) = L_2(f) \quad \forall L_1, L_2 \in V.$$

Мы обозначим значение $A := L(f)$ для произвольного $L \in V$ через $F_V\text{-}\lim f = A$, сохранив специальное обозначение $F\text{-}\lim f = A$ для $V = BL(H)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\kappa \in R(\psi)$, то $\{f_{L, \kappa} \mid L \in BL(\mathbb{R}_+)\} = \{f_{L', \kappa} \mid L' \in BL(\mathbb{N})\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$, $\kappa \in R(\psi)$ и $x \in M_+(\psi)$. Тогда

$$\text{F-lim}_{t \rightarrow \infty} \phi_\kappa(x)(t) = A$$

в том и только том случае, когда

$$\text{F-lim}_{n \rightarrow \infty} \phi_\kappa(x)(n) = A$$

для некоторого $A \geq 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $\kappa \in R(\psi)$. Тогда утверждения

- (i) $f_{L', \kappa} \in M_+(\psi)_{\text{sym}, \infty}^* \quad \forall L' \in BL(\mathbb{N})$;
- (ii) $f_{L, \kappa} \in M_+(\psi)_{\text{sym}, \infty}^* \quad \forall L \in BL(\mathbb{R}_+)$;
- (iii) $\kappa \in \text{Rexp}(\psi)$

эквивалентны.

2. Конструкция Конна–Диксмье [1, п. IV.2] порождает сингулярные симметричные функционалы на $M_+(\psi)$ для специальной функции $\psi(t) = \log(1+t)$. Мы обобщим эту конструкцию на произвольные пространства Марцинкевича $M(\psi)$ для $\psi \in \Omega_\infty$ и покажем, что построенные таким образом функционалы образуют подкласс функционалов вида $f_{L, \kappa}$, введенных и изученных выше.

Пусть $k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ есть непрерывная возрастающая кусочно-дифференцируемая функция. Определим

$$M_k(g)(\lambda) := \frac{1}{k(\lambda)} \int_0^\lambda g(s) dk(s), \quad \text{где } g \in C_b(\mathbb{R}_+) \text{ и } \lambda > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (ср. с определением в [1, п. IV.2]). Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $k \in \mathcal{K}$ есть кусочно-дифференцируемая функция, $k(0) = 0$. Назовем функционалом Конна–Диксмье на $M_+(\psi)$ функционал $\tau_{\gamma, k}(x) = \gamma \circ M_k(\phi(x))$, $x \in M_+(\psi)$, где $\gamma \in SC_b^*(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $k \in \mathcal{K}$, $k(0) = 0$. Определим функцию $g_k(t) := g(k(t))$ для всех $t > 0$ и $g \in C_b(\mathbb{R}_+)$. Ясно, что $g \rightarrow g_k$ есть *-автоморфизм $C_b(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\gamma \in SC_b^*(\mathbb{R}_+)$. Тогда функционал γ_k на $C_b(\mathbb{R}_+)$, определенный равенством

$$\gamma_k(g) := \gamma(g_k) \quad \forall g \in C_b(\mathbb{R}_+),$$

также является элементом $SC_b^*(\mathbb{R}_+)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $k \in \mathcal{K}$ кусочно-дифференцируемая функция и $k(0) = 0$. Тогда

$$\gamma \circ M_k(g) = \gamma_k \circ C(g_{k^{-1}}) = L_{\gamma_k}(g_{k^{-1}}) \quad \text{для всех } g \in C_b(\mathbb{R}_+),$$

где $L_{\gamma_k} \in CBL(\mathbb{R}_+)$ описан в определении 3.

Как следствие мы получаем следующий идентификационный результат.

ТЕОРЕМА 4. Если k кусочно-дифференцируема и $k(0) = 0$, то множество функционалов Конна–Диксмье, возникающих из функции k , есть

$$\{\tau_{\gamma, k} \mid \gamma \in SC_b^*(\mathbb{R}_+)\} = \{f_{L, k^{-1}} \mid L \in CBL(\mathbb{R}_+)\}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $V \subset BL(\mathbb{R}_+)$. Будем говорить, что V обладает свойством чедаковского предела, если для любого $g \in C_b(\mathbb{R}_+)$ выполнено $\{a, b\} \subset \{L(g) \mid L \in V\}$, где

$$a = \liminf_{t \rightarrow \infty} C(g)(t), \quad b = \limsup_{t \rightarrow \infty} C(g)(t).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Множество пределов Чезаро–Банаха $CBL(\mathbb{R}_+)$ обладает свойством чезаровского предела.

Определим полунорму, полагая

$$\|x\|_{\kappa, V} := \sup\{f_{L, \kappa}(|x|) \mid L \in V\} \quad \text{для } x \in M(\psi).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$, $\kappa \in D(\psi)$, и пусть $V \subset BL(\mathbb{R}_+)$ обладает свойством чезаровского предела. Тогда

$$\frac{1}{e}\rho_1(x) \leq \|x\|_{\kappa, V} \leq \rho_1(x) \quad \forall x \in M(\psi).$$

3. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$, $\kappa \in \mathcal{K}$ и $V \subset BL(\mathbb{R}_+)$ обладает свойством чезаровского предела. Имея семейство $\{f_{L, \kappa} \mid L \in V\}$ функционалов, заданных на $M_+(\psi)$, естественно рассмотреть элементы x из $M_+(\psi)$ такие, что

$$f_{L_1, \kappa}(x) = f_{L_2, \kappa}(x) \quad \forall L_1, L_2 \in V. \quad (2)$$

Очевидно, равенство (2) выполняется тогда и только тогда, когда $\phi(x)(t)$ почти сходится на бесконечности относительно V и, значит,

$$f_{L, \kappa}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_V \phi_\kappa(x)(t).$$

Однако почти сходимость не является прозрачным и функциональным условием. Ниже мы рассмотрим другие условия, которые вместе с некоторым предположением на рост κ окажутся эквивалентными свойству (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Функция $g \in C_b(\mathbb{R}_+)$ называется:

- (i) *сходящейся по Чезаро*, если существует $\lim_{t \rightarrow \infty} C(g)(t)$;
- (ii) *V -почти сходящейся на бесконечности*, если существует $F_V \lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$;
- (iii) *сходящейся на бесконечности*, если существует $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$.

Обозначаем через $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}_V$, $\mathcal{S}$ множества сходящихся по Чезаро, V -почти сходящихся и сходящихся на бесконечности функций соответственно. Поскольку V обладает свойством чезаровского предела, мы имеем вложения $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}_V \subset \mathcal{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$, $\kappa \in \mathcal{K}$, и пусть $x \in M_+(\psi)$. Следуя Конну [1], будем говорить, что x является $\mathcal{C}_\kappa$ -измеримым, если $\phi_\kappa(x) \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F}_{V, \kappa}$ -измеримым, если $\phi_\kappa(x) \in \mathcal{F}_V$, и $\mathcal{S}$ -измеримым (или *тауберовым*), если $\phi(x) \in \mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$, $\kappa \in R(\psi)$, и пусть $x \in M_+(\psi)$ таков, что функция

$$\sigma(t) = t\phi_\kappa(x)(t) \quad (3)$$

не убывает. Тогда для такого x три определения измеримости, приведенные в определении 10, эквивалентны между собой.

Заметим, что если $\kappa \in D(\psi)$, то условие (3) в теореме 6 выполнено для всех $x \in M(\psi)$. Доказательство теоремы 6 основывается на следующей теореме тауберова типа.

ТЕОРЕМА 7. Пусть σ есть неубывающая положительная на $\mathbb{R}_+$ функция. Тогда функция $\sigma(t)/t$ сходится на бесконечности в том и только том случае, если она сходится по Чезаро.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [4] было показано, что если

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1, \quad \text{а} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 2,$$

то существует $x_0 > 0$ из $M(\psi) \setminus M_1(\psi)$ такой, что все сингулярные симметричные функционалы, определенные на $M(\psi)$, обращаются в нуль на x_0 . Однако если бы $\phi(x)(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $\rho_1(x_0) = 0$ и $x_0 \in M_1(\psi)$, что приводит к противоречию. Следовательно, существуют $\psi \in \Omega_\infty$ такие, что для любого $\kappa \in \mathcal{K}$, принадлежащего $\text{Rexr}(\psi)$, множества $\mathcal{C}_\kappa$ -измеримых и $\mathcal{S}$ -измеримых элементов не идентичны.

В заключение рассмотрим частный случай $V = CBL(\mathbb{R}_+)$. С учетом отождествления (1) полученные выше результаты применимы к функционалам Конна–Диксмье.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ и $k \in \mathcal{K}$, $k(0) = 0$, является кусочно дифференцируемой функцией такой, что $k^{-1} \in D(\psi)$. Тогда

- A) для всех $x \in M(\psi)$ выполнено $\rho_1(x) \simeq \sup\{\tau_{\gamma,k}(|x|) \mid \gamma \in SC_b^*(\mathbb{R}_+)\}$;
- B) следующие утверждения эквивалентны:
 - (i) x является $\mathcal{C}_{k^{-1}}$ -измеримым;
 - (ii) $\tau_{\gamma,k}(x)$ не зависит от $\gamma \in SC_b^*(\mathbb{R}_+)$;
 - (iii) выполнено равенство

$$\tau_{\gamma,k}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds \quad \text{для всех } \gamma \in SC_b^*(\mathbb{R}_+).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Конструкция Конна из [1] использует пару функций $\psi(t) = \log(1+t)$ и $k(t) = \log(1+t)$. Очевидно, что $\psi^{-1} = k^{-1}$ удовлетворяют предположениям теоремы 8. Следовательно, результат B) теоремы 8 (i) $\iff$ (ii) обобщает на произвольные пространства Марцинкевича утверждение, доказанное Конном в [1, предложение IV.2.β.6]. Результат B) теоремы 8 (ii) $\iff$ (iii) является новым даже для $\psi = \kappa = \log(1+t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Connes A. Noncommutative Geometry. San Diego: Academic Press, 1994.
2. Dixmier J. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1966. V. 262. P. 1107–1108.
3. Dodds P., de Pagter B., Semenov E., Sukochev F. // Positivity. 1998. V. 2. P. 47–75.
4. Доддс П. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А. // Записки научных семин. ПОМИ. 2002. Т. 290. С. 42–71.
5. Доддс П. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А. // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 6. С. 111–136.
6. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
7. Lorentz G. // Acta Math. 1948. V. 80. P. 167–190.

(С. Лорд, Ф. А. Сукочев) Flinders University of South Australia, Австралия
 (А. А. Седаев) Воронежский государственный
 архитектурно-строительный университет
E-mail: steven_lord_au@yahoo.com.au, sed@vmail.ru,
sukochev@infoeng.flinders.edu.au

Поступило
 30.06.2004