Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Карабаш, А. С. Костенко, О подобии операторов типа $\operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta \right)$ нормальному и самосопряженному операторам, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 134–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:22:43

О ПОДОБИИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА $\operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta \right)$ НОРМАЛЬНОМУ И САМОСОПРЯЖЕННОМУ ОПЕРАТОРАМ

И. М. Карабаш, А. С. Костенко

1. Спектральные задачи вида

$$(Ly)(x) = \lambda r(x)y(x),$$

где L – самосопряженный дифференциальный оператор, а функция $r(x)$ принимает значения разных знаков, исследуются давно в связи с некоторыми задачами механики и физики (см. библиографию в [1]). В работах Р. Билса [1] и С. Г. Пяткова [2] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса собственных функций для такой спектральной задачи. В последнее время активно исследуются аналогичные вопросы для операторов с непрерывным спектром. Используя теорию М. Крейна–Г. Лангера дефинизируемых операторов в пространстве Крейна, Б. Кургус и Б. Найман [3] показали, что

оператор

$$\tilde{A} = -(\operatorname{sgn} x) \frac{d^2}{dx^2}, \quad D(\tilde{A}) = W_2^2(\mathbb{R}), \quad (1)$$

подобен в $L^2(\mathbb{R})$ самосопряженному. Используя резольвентный критерий подобия [4], [5], этот результат был просто передоказан в [6]. Недавно в [7] получен аналогичный результат для некоторого класса операторов Штурма–Лиувилля с убывающим потенциалом.

2. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R})$ наряду с оператором $\tilde{A}$ вида (1) симметрический оператор

$$A = -(\operatorname{sgn} x) \frac{d^2}{dx^2} \quad (2)$$

с областью определения

$$D(A) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}) : y(0) = y'(0) = 0\}. \quad (3)$$

В заметке изучаются квазиэрмитовы (см. [8]) расширения оператора A , соответствующие различным граничным условиям в точке 0. Наша цель – описание тех граничных условий, при которых соответствующий дифференциальный оператор подобен нормальному (самосопряженному) оператору. Заметим, что в рассматриваемом семействе расширений оператора A содержатся операторы, порождаемые в $L^2(\mathbb{R})$ дифференциальными выражениями

$$l := \operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta(x) \right), \quad l := \operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta'(x) \right), \quad c \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

где $\delta(x)$ – это δ -функция Дирака (см. примеры 1 и 2).

Общее квазиэрмитово расширение $A_{(a_{ij})}$ оператора A задается условиями

$$\begin{aligned} a_{11}y(-0) + a_{12}y'(-0) + a_{13}y(+0) + a_{14}y'(+0) &= 0, \\ a_{21}y(-0) + a_{22}y'(-0) + a_{23}y(+0) + a_{24}y'(+0) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых невырожден хотя бы один из следующих детерминантов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

В противном случае ранг матрицы (a_{ij}) системы (5) не превосходил бы единицы.

При этом $D(A_{(a_{ij})}) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : y(x) \text{ удовлетворяет условиям (5)}\}$. Здесь $W_2^2(\mathbb{R}_\pm)$ – пространства Соболева.

Пусть для определенности $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда условия (5) примут вид

$$y'(+0) = b_{11}y(+0) + b_{12}y'(-0), \quad -y(-0) = b_{21}y(+0) + b_{22}y'(-0). \quad (7)$$

Для каждой матрицы $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ($\mathbb{C}^{m \times m}$ – множество $(m \times m)$ матриц с элементами из $\mathbb{C}$) обозначим через A_B оператор, порожденный дифференциальным выражением $-(\operatorname{sgn} x) d^2/dx^2$ на области определения

$$D(A_B) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : \{y'(+0), -y(-0)\}^t = B\{y(+0), y'(-0)\}^t\}. \quad (8)$$

Ясно, что $A_B^* = A_{B^*}$. В частности, A_B самосопряжен точно тогда, когда $B = B^*$.

Заметим, что оператору $\tilde{A} = -(\operatorname{sgn} x) d^2/dx^2$ вида (1) соответствует матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq B^*$. Обозначим

$$M(\lambda) := \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Приведем основные результаты заметки лишь для расширений A_B вида (8).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ и $|b_{12}| + |b_{21}| \neq 0$. Тогда оператор A_B подобен нормальному, если и только если аналитические в $\mathbb{C}_+$ функции

$$\varphi(\lambda) := \det(B - M(\lambda)), \quad \varphi_*(\lambda) := \det(B^* - M(\lambda)) \quad (10)$$

удовлетворяют следующим условиям:

- 1) φ и φ_* не имеют нулей во множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- 2) φ и φ_* не имеют нулей кратности 2 в открытой верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что в случае $|b_{12}| + |b_{21}| = 0$ оператор A_B распадается в прямую сумму двух дифференциальных операторов, действующих в пространствах $L^2(\mathbb{R}_-)$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$, а такие операторы подробно изучены.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия 1) и 2) теоремы 1 легко проверяемы, так как

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= -ib_{22}\sqrt{\lambda} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} - i + \frac{b_{11}}{\sqrt{\lambda}}, \\ \varphi_*(\lambda) &= -i\overline{b_{22}}\sqrt{\lambda} + \overline{(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})} - i + \frac{\overline{b_{11}}}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

3. Хорошо известно, что условие

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{\text{dist}(\lambda, \sigma(T))} \quad (11)$$

необходимо для подобия оператора T нормальному оператору.

Пусть $\sqrt{\lambda}$ – ветвь аналитической функции $\sqrt{\lambda}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$ такая, что $\sqrt{\lambda} \geq 0$ на верхнем берегу разреза; $\Re(A)$ – область значений оператора A ; $\sigma(A)$ – его спектр; $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$, $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A) : \Re(A - \lambda I) \neq H\}$, $\sigma_c(A) = \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A))$ – точечный, остаточный и непрерывный спектры оператора A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ и $|b_{12}| + |b_{21}| \neq 0$. Тогда

- 1) $\sigma_c(A_B) = \mathbb{R}$;
- 2) $\sigma_r(A_B) = \emptyset$;
- 3) $\sigma_p(A_B) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : \varphi(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}_- : \varphi_*(\bar{\lambda}) = 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простые вычисления показывают, что на действительной оси собственных значений нет, откуда легко следует утверждение о непрерывном спектре.

Для доказательства второго и третьего утверждений можно воспользоваться техникой граничных троек (см. [9]). Заметим, что совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой

$$\Gamma_0 y := \text{col}(y'(+0), -y(-0)), \quad \Gamma_1 y := \text{col}(y(+0), y'(-0)), \quad \mathcal{H} := \mathbb{C}^2,$$

образует граничную тройку. Функция Вейля $M(\lambda)$, соответствующая этой тройке Π , имеет вид (9). Кроме того, $D(A_B) = \{y \in D(A^*) : \Gamma_0 y = B\Gamma_1 y\}$. Утверждение о точечном и существенном спектре следует теперь из [9, предложение 4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$ является нулем второго порядка функции $\varphi(\lambda)$ (функции $\varphi_*(\lambda)$) вида (10), то резольвента $(A_B - \lambda I)^{-1}$ имеет в точке λ_0 ($\overline{\lambda_0}$) полюс второго порядка и, значит, оператор A_B не подобен нормальному.

Рассмотрим теперь случай, когда функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_*(\lambda)$ вида (10) обращаются в нуль на непрерывном спектре $\sigma_c(A_B)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ является нулем функции $\varphi(\lambda)$ либо $\varphi_*(\lambda)$, то оценка (11) для оператора A_B не выполняется в окрестности точки λ_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для того чтобы оценка (11) выполнялась в окрестности ∞ необходимо, чтобы функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_*(\lambda)$ не имели нуля в бесконечности.

Из предложений 2–4 вытекает необходимость выполнения условий 1) и 2) теоремы 1.

Доказательство достаточности основано на резольвентном критерии подобия замкнутого оператора самосопряженному [4], [5] и теореме вложения Карлесона (см. [10]).

Из теоремы 1 с очевидностью вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $|b_{12}| + |b_{21}| \neq 0$. Тогда оператор A_B подобен самосопряженному, если и только если функции $\varphi(\lambda)$ и $\varphi_*(\lambda)$ не имеют нулей в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4. Если $\Delta_1 \neq 0$, то граничную тройку $\Pi_1 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ можно выбрать так:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2, \quad \Gamma_0 f = \text{col}(-y(+0), y'(-0)), \quad \Gamma_1 f = \text{col}(y'(+0), y(-0)). \quad (12)$$

Пусть A_B – расширение оператора A вида

$$D(A_B) = \text{Ker}(\Gamma_0 - B\Gamma_1) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+): \Gamma_0 y = B\Gamma_1 y\}, \quad (13)$$

где $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Граничные условия $\Gamma_0 y = B\Gamma_1 y$ переписываются в виде

$$-y(+0) = b_{11}y'(+0) + b_{12}y(-0), \quad y'(-0) = b_{21}y'(+0) + b_{22}y(-0). \quad (14)$$

Функция Вейля, соответствующая тройке Π_1 , имеет вид

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{i\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Если $\Delta_3 \neq 0$, то граничную тройку $\Pi_3 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ можно выбрать так:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2, \quad \Gamma_0 y = \text{col}(y'(+0), y'(-0)), \quad \Gamma_1 y = \text{col}(y(+0), y(-0)). \quad (16)$$

В этом случае расширения A_B оператора A имеют область определения вида

$$D(A_B) := \text{Ker}(\Gamma_0 - B\Gamma_1) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+): \Gamma_0 y = B\Gamma_1 y\}, \quad (17)$$

$$B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Пусть $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Тогда условия в нуле имеют вид

$$y'(+0) = b_{11}y(+0) + b_{12}y(-0), \quad y'(-0) = b_{21}y(+0) + b_{22}y(-0). \quad (18)$$

Далее, матрица-функция

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (19)$$

является функцией Вейля соответствующей тройки $\Pi_3 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$.

Теоремы 1 и 2 остаются верными и для расширений A_B вида (13) и (17) при замене $M(\lambda)$ вида (9) функцией Вейля вида (15) и (19) соответственно.

5. Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Пусть $\delta(x)$ – δ -функция Дирака. Выражение

$$l_c = -\frac{d^2}{dx^2} + c\delta, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (20)$$

порождает в $L^2(\mathbb{R})$ (см. [11]) дифференциальный оператор вида

$$\begin{aligned} L_c y(x) &= y''(x), \\ D(L_c) &= \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : y(+0) = y(-0), y'(+0) - y'(-0) = cy(0)\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ясно, что оператор $A := JL_c$ ($J: y(x) \rightarrow (\operatorname{sgn} x)y(x)$) – это в точности оператор A_B , заданный дифференциальным выражением (2) и условиями (7), причем $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть L_c – оператор вида (21) и $c \neq 0$. Оператор JL_c подобен нормальному точно тогда, когда $\operatorname{Re}(c) \neq -|\operatorname{Im}(c)|$. При этом JL_c подобен самосопряженному оператору, если и только если $\operatorname{Re}(c) > -|\operatorname{Im}(c)|$.

ПРИМЕР 2. Дифференциальное выражение

$$l_c = -\frac{d^2}{dx^2} + c\delta', \quad c \in \mathbb{C}, \quad (22)$$

порождает в $L^2(\mathbb{R})$ оператор следующего вида (см. [11]):

$$\begin{aligned} L_c y(x) &= y''(x), \\ D(L_c) &= \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : y'(+0) = y'(-0), y(+0) - y(-0) = cy'(0)\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Оператор JL_c совпадает с оператором A_B , порожденным дифференциальным выражением (2) и краевыми условиями вида (7) с матрицей $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть L_c – оператор вида (23) и $c \neq 0$. Оператор JL_c подобен нормальному тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(c^2) \neq 0$. При этом он подобен самосопряженному оператору точно тогда, когда $|\operatorname{Re}(c)| > |\operatorname{Im}(c)|$.

Авторы выражают искреннюю благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи и руководство работой, а также А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликову, на семинаре которых докладывалась работа, за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beals R. // J. Differential Equations. 1985. V. 56. № 3. P. 391–407. 2. Пятков С. Г. // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. № 4. С. 111–124. 3. Čurgus B., Najman B. // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 1125–1128. 4. Набоко С. Н. // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 1. С. 16–27. 5. Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1985. Т. 37. № 1. С. 49–56. 6. Karabash I. M. // Methods of Functional Analysis and Topology. 2000. V. 6. № 2. P. 22–49. 7. Фадеев М. М., Штеренберг Р. Г. // Записки научн. семинаров ПОМИ. 2000. Т. 270. С. 336–349. 8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Т. 2. Харьков: Вища Школа, 1978. 9. Деркач В. А., Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. № 4. С. 435–459. 10. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984. 11. Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvabel models in quantum mechanics. New York: Springer, 1988.

Донецкий национальный университет, Донецк

E-mail: karabashi@yahoo.com, aleksey_kostenko@mail.ru

Поступило

12.11.2002