Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кротов, Когда ортогональный ряд является рядом Фурье, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 139–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:15:52

КОГДА ОРТОГОНАЛЬНЫЙ РЯД ЯВЛЯЕТСЯ РЯДОМ ФУРЬЕ

В. Г. Кротов

В работе [1] (см. также [2, гл. VI, § 4]) Орлич нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд по ортонормированной системе (ОНС) был рядом Фурье функции из того или иного класса (см. замечание 1 ниже). Эти условия выражаются в терминах регулярных средних ортогонального ряда. Доказательство Орлича проходит, на самом деле, в гораздо более общей ситуации, которую мы сейчас опишем.

Пусть X – банахово пространство над полем скаляров $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ – последовательность элементов из X , $\mathcal{L}_{\Phi}$ – линейная оболочка этой системы, X_{Φ} – замыкание $\mathcal{L}_{\Phi}$ по норме X . Будем предполагать, что существуют счетное множество $\Phi^* = \{\phi_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times \Phi^* \rightarrow \mathbb{F}$, линейная и непрерывная по первой переменной и удовлетворяющая условию

$$\langle \phi_k, \phi_i^* \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Условие (1) позволяет определить ряды Фурье

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k^* \rangle \phi_k, \quad x \in X.$$

Будем говорить, что выполнено *условие (А)*, если для любой ограниченной последовательности $\{p_n\} \subset \mathcal{L}_{\Phi}$ существуют $x \in X$ и $n_j \uparrow \infty$, для которых

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \langle p_{n_j}, \phi_i^* \rangle = \langle x, \phi_i^* \rangle.$$

Условие (А) (представляющее собой рабочую форму условия “ X – сопряженное пространство”) является, по существу, ядром доказательства приведенного ниже предложения, дающего критерий для свойства “ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k$ является рядом Фурье” в терминах матричных средних этого ряда.

Пусть $T = \{t_{nk}\} \subset \mathbb{F}$ – конечнострочная матрица (для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m_n \in \mathbb{N}$, что $t_{nk} = 0$ при $k > m_n$). Ниже будем использовать условие

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = t_k, \quad \varliminf_{k \rightarrow \infty} |t_k| > 0. \quad (2)$$

Матрица T порождает средние ряда Фурье

$$T_n x = \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} \langle x, \phi_k^* \rangle \phi_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Орлич рассматривал следующие формы свойства “ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k$ является рядом Фурье”¹:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k \text{ — ряд Фурье элемента из } X \iff \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} a_k \phi_k \right\|_X < \infty, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k \text{ — ряд Фурье элемента из } X \iff \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} a_k \phi_k \text{ сходится по норме } X. \quad (4)$$

В связи с этим естественно рассмотреть условие

$$\sup_n \|T_n\|_{X \rightarrow X} < \infty, \quad (5)$$

которое является необходимым для (3) и (4). Это следует из теоремы Банаха–Штейнгауза.

Для дальнейшего нам понадобится еще следующее понятие. Последовательность $\gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{F}$ называется *мультипликатором* для X , если для любого $x \in X$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \langle x, \phi_k^* \rangle \phi_k$$

является рядом Фурье некоторого элемента $x_\gamma \in X$. Класс всех мультипликаторов для X обозначаем через $\mathcal{M}(X)$. Если система $\{\phi_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ полна на X (т.е. из $\langle x, \phi_k^* \rangle = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ следует $x = 0$), то $x_\gamma \in X$ определяется однозначно и в таком случае мультипликатор γ определяет линейный оператор

$$M_\gamma x = x_\gamma. \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть матрица T удовлетворяет условию (2), причем²

$$\frac{1}{t} = \left\{ \frac{1}{t_k} \right\} \in \mathcal{M}(X). \quad (7)$$

Тогда

- 1) если выполнено условие (A), то $(5) \iff (3)$;
- 2) если Φ замкнута в X (т.е. $X_\Phi = X$), то $(5) \iff (4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что из (3) и из (4) следует (5), уже отмечалось.

Импликация “слева направо” в (3) и (4) мгновенно вытекает из условия (5) (и замкнутости Φ в случае 2)).

Обратно, если последовательность средних

$$p_n = \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} a_k \phi_k$$

ограничена, то используем условие (A): для некоторого $x \in X$ и любого $i \in \mathbb{N}$

$$t_i a_i = \lim_{j \rightarrow \infty} t_{n_j i} a_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m_{n_j}} t_{n_j k} a_k \phi_k, \phi_i^* \right\rangle = \langle x, \phi_i^* \rangle.$$

В силу (7) $\{a_i\}$ — последовательность коэффициентов Фурье некоторого элемента из X . В случае 2) рассуждение такое же с $n_j = j$.

Приведем теперь следствие, относящееся к пространствам $L^p = L^p(S)$ (S — множество с σ -конечной мерой) и ортогональным (в смысле L^2) рядам.

¹Мы не останавливаемся на других формах критерия из работы Орлича [1] (см. также [2, гл. VI, § 4]). Они также могут быть рассмотрены при наших предположениях относительно матрицы T .

²Мы считаем $1/0 = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\Phi \subset L^p \cap L^{p'}$ – ОНС. Тогда если матрица T удовлетворяет условию (2) и $1/t \in \mathcal{M}(L^p)$, то

- 1) при $1 < p \leq \infty$ $(5)_{L^p} \iff (3)_{L^p}$;
- 2) при $1 \leq p < \infty$, если Φ замкнута в L^p , $(5)_{L^p} \iff (4)_{L^p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо взять $\phi_k^* = \phi_k$ и

$$\langle x, y \rangle = \int_S x(t) \overline{y(t)} dt.$$

Тогда (1) – условие ортогональности, (А) выполнено, так как L^p является сопряженным пространством, и ограниченное множество в нем слабо предкомпактно (см. [2, с. 40]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следствие 1 отличается от теоремы Орлича (см. [2, с. 251–252]) тем, что в ней $t_k = 1$ (и тогда условия (2) и (7) излишни), а вместо $(5)_{L^p}$ использовалось условие ограниченности функций Лебега (из которого вытекает $(5)_{L^p}$ для всех $X = L^p$, $1 \leq p \leq \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия, при которых справедливы $(3)_{L^p}$ и $(4)_{L^p}$ для общих ортогональных систем, изучались в [3], но проверка условия $1/t \in \mathcal{M}(L^p)$ в [3] (см. [3, лемма 3]) ошибочна, так как использует неверное равенство $M_{1/t}(L^p \setminus M_t(L^p)) = L^2 \setminus L^p$ (см. (6)). Поэтому все теоремы этой работы не обоснованы.

Приведем теперь результаты, аналогичные следствию 1, но для других функциональных пространств. Мы используем ниже в следствии 2 обозначения и терминологию, связанные с пространствами Орлича L_φ^* из [4], с пространствами Харди H^p и функций ограниченного среднего колебания ВМО из [5], с пространством функций ограниченной вариации V из [2]. Через C обозначается, как обычно, пространство непрерывных функций.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Phi \subset L^2$ – ОНС и матрица T удовлетворяет условию (2). Тогда

- 1) если φ – N -функция Юнга, ψ – дополнительная для φ N -функция Юнга, $\Phi \subset L_\varphi^* \cap L_\psi^*$ и $1/t \in \mathcal{M}(L_\varphi^*)$, то $(5)_{L_\varphi^*} \iff (3)_{L_\varphi^*}$;
- 2) если $\Phi \subset H^\infty$ и $1/t \in \mathcal{M}(H^1)$, то $(5)_{H^1} \iff (3)_{H^1}$;
- 3) если $\Phi \subset L^\infty$ и $1/t \in \mathcal{M}(\text{ВМО})$, то $(5)_{\text{ВМО}} \iff (3)_{\text{ВМО}}$;
- 4) если $\Phi \subset V$ и $1/t \in \mathcal{M}(V)$, то $(5)_V \iff (3)_V$;
- 5) если $\Phi \subset C$ замкнута в C и $1/t \in \mathcal{M}(C)$, то $(5)_C \iff (4)_C$.

Для доказательства надо лишь проверить условие (А) в случаях 1)–4). Оно вытекает из того, что пространства L_φ^* , H^1 , ВМО и V являются сопряженными пространствами, и слабой компактности единичного шара в сопряженном пространстве (см. [2, с. 40]). Для пространств Орлича см. [4, теорема 14.2 на с. 153], для H^1 см. [5, с. 275], для ВМО см. [5, с. 245], для V см. [2, с. 29].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из следствий 1 и 2 в частном случае тригонометрической системы вытекают результаты работ [6]–[9], где рассматривались пространства $L^p(\mathbb{T})$, L_φ^* и ВМО.

Например, условия следствия 1 вытекают из условий [8] и теоремы Марцинкевича о мультипликаторах в $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1, \infty)$ ([10, с. 346]). В [7] ограничения еще более сильные, чем в [8], и для доказательства использовались неравенство Хаусдорфа–Юнга, теорема Карлесона–Ханта и т.д. Результаты работы [9] вытекают из следствий непосредственно. При этом во всех случаях наши ограничения на матрицу T существенно шире.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orlicz W. // *Studia Math.* 1929. V. 1. P. 1–39. 2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958. 3. Бруй И. Н. // *Матем. заметки.* 2002. Т. 71. № 2. С. 182–193. 4. Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: ГИФМЛ, 1958. 5. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 6. Bruj I., Schmieder G. // *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1998. V. 64. P. 483–488. 7. Бруй И. Н. // *Матем. заметки.* 1997. Т. 62. № 5. С. 677–686. 8. Бруй И. Н. // *Весті АН Беларусі. Сер. фіз. -матем.* 2000. № 1. С. 46–49. 9. Бруй И. Н. // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. № 4. С. 17–36. 10. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.

Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: krotov@bsu.by

Поступило
01.07.2002