Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Р. Мамедов, Единственность решения обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 142–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 18:19:40

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Х. Р. Мамедов

Рассмотрим на полуоси $0 \leq x < \infty$ краевую задачу, порожденную дифференциальным выражением

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad (1)$$

и краевым условием

$$y'(0) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)y(0) = 0, \quad (2)$$

где λ – спектральный параметр, $q(x)$ – вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{+\infty} (1+x)|q(x)| dx < \infty, \quad (3)$$

а α_0, α_1 и α_2 – вещественные числа, причем $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 > 0$.

В данной работе доказывается единственность решения обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР) на полуоси для краевой задачи (1)–(3). Отметим, что ОЗТР для уравнения (1) с граничным условием, не содержащим спектральный параметр, полностью изучены в работах [1]–[3]. Обратные задачи на полуоси, связанные с уравнением (1), в различных постановках изучались во многих работах (см., например, [4]).

Известно (см. [2]), что при всех λ из замкнутой верхней полуплоскости уравнение (1) имеет решение $e(x, \lambda)$, представимое в виде

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda t} dt. \quad (4)$$

При этом ядро $K(x, t)$ удовлетворяет соотношениям

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty q(t) dt$$

и

$$|K(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{x+t}{2} \right) \exp \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1 \left(\frac{x+t}{2} \right) \right\}, \quad (5)$$

где положено $\sigma(x) \equiv \int_x^\infty q(t) dt$, $\sigma_1(x) \equiv \int_x^\infty \sigma(t) dt$. Свойства решений $e(x, \lambda)$ и $e(x, -\lambda)$ подробно изучены в [2]. Доказано, что $e(x, \lambda)$ является аналитической функцией от λ в верхней полуплоскости и непрерывной функцией от λ на вещественной оси. При этом во всей полуплоскости $\text{Im } \lambda \geq 0$ справедливы оценки

$$|e(x, \lambda)| \leq \exp\{-\text{Im } \lambda x + \sigma_1(x)\},$$

$$|e(x, \lambda) - e^{i\lambda x}| \leq \left\{ \sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \frac{1}{|\lambda|}\right) \right\} \cdot \exp\{-\text{Im } \lambda x + \sigma_1(x)\}, \quad (6)$$

$$|e'(x, \lambda) - i\lambda e^{i\lambda x}| \leq \sigma(x) \cdot \exp\{-\text{Im } \lambda x + \sigma_1(x)\}. \quad (7)$$

При вещественных $\lambda \neq 0$ функции $e(x, \lambda)$ и $e(x, -\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), причем вронскиан этой системы равен

$$W\{e(x, \lambda), e(x, -\lambda)\} = 2i\lambda.$$

Обозначим через $\omega(x, \lambda)$ решения уравнения (1) при начальных данных

$$\omega(0, \lambda) = 1, \quad \omega'(0, \lambda) = -(\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2).$$

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. При вещественных значениях $\lambda \neq 0$ справедливо тождество

$$\frac{2i\lambda\omega(x, \lambda)}{e'(0, \lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0, \lambda)} = \overline{e(x, \lambda)} - S(\lambda)e(x, \lambda), \quad (8)$$

где

$$S(\lambda) = \frac{\overline{e'(0, \lambda)} + (\alpha_0 - i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)\overline{e(0, \lambda)}}{e'(0, \lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0, \lambda)}, \quad (9)$$

причем

$$\overline{S(\lambda)} = S(-\lambda).$$

ЛЕММА 2. Функция

$$E(\lambda) = e'(0, \lambda) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2)e(0, \lambda)$$

может иметь в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$ лишь конечное число нулей. При этом все эти нули простые и лежат на мнимой оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при вещественных значениях $\lambda \neq 0$ справедливо неравенство $E(\lambda) \neq 0$, единственным вещественным нулем функции $E(\lambda)$ может быть число $\lambda = 0$. Из аналитичности функции $E(\lambda)$ в верхней полуплоскости следует, что ее нули образуют не более чем счетное множество.

Покажем, что это множество является ограниченным. Допустим противное. Пусть существуют λ_k такие, что $|\lambda_k| \rightarrow \infty$, при этом $\text{Im } \lambda_k > 0$ и $E(\lambda_k) = 0$, т.е.

$$e'(0, \lambda_k) = -(\alpha_0 + i\alpha_1\lambda_k + \alpha_2\lambda_k^2)e(0, \lambda_k).$$

Тогда из оценки (7) при $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} e(0, \lambda_k) = 0$. С другой стороны, из (6) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} e(0, \lambda_k) = 1$. Полученное противоречие показывает, что множество $\{\lambda_k\}$ ограничено.

Таким образом, нули функции $E(\lambda)$ образуют ограниченное и не более чем счетное множество, единственной предельной точкой которого может быть лишь нуль.

Теперь покажем, что все нули функции $E(\lambda)$ лежат на мнимой оси. Пусть λ_1 и λ_2 – какие-нибудь нули функции $E(\lambda)$. Умножая первое из соотношений

$$\begin{aligned} -e''(x, \lambda_1) + q(x)e(x, \lambda_1) &= \lambda_1^2 e(x, \lambda_1), \\ -\overline{e''(x, \lambda_2)} + q(x)\overline{e(x, \lambda_2)} &= \overline{\lambda_2^2 e(x, \lambda_2)} \end{aligned}$$

на $\overline{e(x, \lambda_2)}$, а второе – на $e(x, \lambda_1)$, после чего вычитая второе из первого и интегрируя полученную разность от нуля до бесконечности, получим равенство

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \int_0^\infty e(x, \lambda_1) \overline{e(x, \lambda_2)} dx - W\{e(x, \lambda_1), \overline{e(x, \lambda_2)}\}|_{x=0} = 0. \quad (10)$$

С другой стороны, согласно определению функции $E(\lambda)$ имеют место равенства

$$E(\lambda_j) = e'(0, \lambda_j) + (\alpha_0 + i\alpha_1\lambda_j + \alpha_2\lambda_j^2)e(0, \lambda_j), \quad j = 1, 2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} W\{e(x, \lambda_1), \overline{e(x, \lambda_2)}\}|_{x=0} &= e'(0, \lambda_1)\overline{e(0, \lambda_2)} - e(0, \lambda_1)\overline{e'(0, \lambda_2)} \\ &= e(0, \lambda_1)\overline{e(0, \lambda_2)} \cdot (-\alpha_0 - i\alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_1^2) - e(0, \lambda_1)\overline{e(0, \lambda_2)} \cdot (-\alpha_0 + i\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_2^2), \end{aligned}$$

откуда при $\lambda_1 = \lambda_2$ следует, что

$$W\{e(x, \lambda_1), \overline{e(x, \lambda_2)}\}|_{x=0} = |e(0, \lambda_1)|^2 \cdot [-(\overline{\lambda_1} + \lambda_1)i\alpha_1 + (\overline{\lambda_1}^2 - \lambda_1^2)\alpha_2].$$

Следовательно, (10) принимает вид

$$(\lambda_1 + \overline{\lambda_1}) \left[(\lambda_1 - \overline{\lambda_1}) \int_0^\infty |e(x, \lambda_1)|^2 dx + (\lambda_1 - \overline{\lambda_1})\alpha_2 |e(0, \lambda)|^2 + i\alpha_1 |e(0, \lambda_1)|^2 \right] = 0. \quad (11)$$

Так как $\lambda_1 - \overline{\lambda_1} \neq 0$, из (11) следует, что $\lambda_1 + \overline{\lambda_1} = 0$, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$. Значит, нули функции $E(\lambda)$ лежат только на мнимой оси.

Покажем теперь, что функция $E(\lambda)$ имеет конечное число нулей при $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. В общем случае конечность числа нулей функции $E(\lambda)$ вытекает из того, что можно дать оценку для расстояния между ее соседними нулями. Эта оценка может быть получена методом, приведенным в [2]; при этом используется равенство (11).

Теперь покажем, что нули функции $E(\lambda)$ простые. Умножая первое из соотношений

$$\begin{aligned} -e''(x, \lambda) + q(x)e(x, \lambda) &= \lambda^2 e(x, \lambda), \\ -\dot{e}''(x, \lambda) + q(x)\dot{e}(x, \lambda) &= 2\lambda e(x, \lambda) + \lambda^2 \dot{e}(x, \lambda) \end{aligned}$$

на $\dot{e}(x, \lambda)$ (точка над $e(x, \lambda)$ означает производную по λ), а второе – на $e(x, \lambda)$, после чего вычитая первое соотношение из второго и интегрируя полученную разность от нуля до бесконечности, получим согласно определению функции $E(\lambda)$ и оценкам (6), (8) равенство

$$2\lambda \int_0^\infty |e(x, \lambda)|^2 dx = [\dot{E}(\lambda) - (i\alpha_1 + 2\lambda\alpha_2)e(0, \lambda)]e(0, \lambda) - E(\lambda)\dot{e}(0, \lambda).$$

При помощи подстановки $\lambda = i\mu_k$ из последнего равенства получаем равенство

$$2\mu_k \int_0^\infty |e(x, i\mu_k)|^2 dx + (\alpha_1 + 2\alpha_2\mu_k)|e(0, i\mu_k)|^2 = -i\dot{E}(i\mu_k)e(0, i\mu_k). \quad (12)$$

Следовательно, $\dot{E}(i\mu_k) \neq 0$, т.е. нули функции $E(\lambda)$ просты. Лемма доказана.

Заметим, что согласно определению функции $E(\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$E(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

Поэтому функция $S(\lambda)$, определенная формулой (9), которая называется *функцией рассеяния* уравнения (1) с начальным условием (2), обладает при $|\lambda| \rightarrow \infty$ асимптотикой $S(\lambda) = 1 + O(1/\lambda)$. Тем самым $1 - S(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$ и, значит, функция

$$F_s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - S(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (13)$$

тоже принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$.

Для вывода основного уравнения используем полученное в лемме 1 равенство (8):

$$\frac{2i\lambda\omega(x, \lambda)}{E(\lambda)} = \overline{e(x, \lambda)} - S(\lambda)e(x, \lambda).$$

Подставляя сюда вместо $e(x, \lambda)$ его выражение (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{2i\lambda\omega(x, \lambda)}{E(\lambda)} + 2i \sin \lambda x &= \int_x^{\infty} K(x, t) e^{-i\lambda t} dt + (1 - S(\lambda)) e^{i\lambda x} \\ &+ \int_x^{\infty} K(x, t) (1 - S(\lambda)) e^{i\lambda t} dt - \int_x^{\infty} K(x, t) e^{i\lambda t} dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножим обе части равенства (14) на $e^{i\lambda y}/\pi$ и проинтегрируем это соотношение по λ от $-\infty$ до $+\infty$. В правой части при $y > x$ получим

$$K(x, y) + F_s(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, t) F_s(t + y) dt, \quad (15)$$

а в левой части, воспользовавшись леммой Жордана и теоремой о вычете, имеем

$$- \sum_{k=1}^n \frac{2i\lambda_k \omega(x, i\lambda_k) e^{-\lambda_k y}}{\dot{E}(i\lambda_k)}.$$

Учитывая формулу (12), можно преобразовать это выражение к такому виду:

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^n \frac{2i\lambda_k \omega(x, i\lambda_k) e^{-\lambda_k y}}{\dot{E}(i\lambda_k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{2\lambda_k e(x, i\lambda_k) e^{-\lambda_k y}}{i\dot{E}(i\lambda_k) e(0, i\lambda_k)} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{2\lambda_k e(x, i\lambda_k) e^{-\lambda_k y}}{2\lambda_k \int_0^{\infty} |e(x, i\lambda_k)|^2 dx + (\alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_k) |e(0, i\lambda_k)|^2} = - \sum_{k=1}^n m_k^2 e(x, i\lambda_k) e^{-\lambda_k y} \\ &= \sum_{k=1}^n m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k(x+y)} + \int_x^{\infty} K(x, t) e^{-\lambda_k(t+y)} dt \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$m_k^{-2} = \int_0^{\infty} |e(x, i\lambda_k)|^2 dx + \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_k}{2\lambda_k} |e(0, i\lambda_k)|^2.$$

Итак, при $y > x$, учитывая (15) и (16), выводим из (14) равенство

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^n m_k^2 \left\{ e^{-\lambda_k(x+y)} + \int_x^{\infty} K(x, t) e^{-\lambda_k(t+y)} dt \right\} \\ = F_s(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, t) F_s(t + y) dt + K(x, y), \end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$F(x+y) + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, t)F(t+y) dt = 0, \quad x < y < \infty, \quad (17)$$

где

$$F(x) = \sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k x} + F_s(x) = \sum_{k=1}^n m_k^2 e^{-\lambda_k x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (1 - S(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (18)$$

Уравнение (17) называют *основным уравнением обратной задачи теории рассеяния*.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. При каждом $x \geq 0$ ядро $K(x, y)$ оператора преобразования (специального решения (4)) удовлетворяет основному уравнению (17).

Очевидно, чтобы составить основное уравнение, достаточно знать функцию $F(x)$. В свою очередь, чтобы найти функцию $F(x)$, достаточно знать только набор величин $\{S(\lambda) \ (-\infty < \lambda < \infty); \lambda_k; m_k \ (k = 1, 2, \dots, n)\}$. Набор величин $\{S(\lambda); \lambda_k; m_k\}$ будем называть *данными рассеяния* краевой задачи (1), (2). Зная данные рассеяния, можно построить по формуле (18) функцию $F(x)$ и написать основное уравнение (17) относительно неизвестной функции $K(x, y)$. Решив это уравнение, найдем ядро $K(x, y)$ оператора преобразования, а значит, и потенциал

$$q(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} K(x, x).$$

ТЕОРЕМА 2. При каждом фиксированном $x > 0$ основное уравнение (17) имеет единственное решение $K(x, y) \in L_1[x, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходная функция $F_s(x)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам переходной функции для задачи без спектрального параметра в краевых условиях, а потому доказательство теоремы 2 следует из [2, теорема 3.3.1].

Автор выражает благодарность проф. И. М. Гусейнову за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В. А. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 5. С. 695–698.
2. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
3. Левитан Б. М. // Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 4. С. 611–624.
4. Почейкина–Федотова Е. А. // Изв. вузов. Матем. 1972. № 7. С. 75–84.