Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, Т. В. Белоглазова, Е. В. Дикарева,
Т. В. Перловская, О функции Грина для локально взаи-
модействующей системы обыкновенных уравнений разного
порядка, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 146–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 05:16:14

О ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗНОГО ПОРЯДКА

Ю. В. Покорный, Т. В. Белоглазова, Е. В. Дикарева, Т. В. Перловская

На промежутке $[0, l]$ рассматриваются дифференциальные уравнения

$$(p_1 u_1'')'' = f_1(x), \quad x \neq \xi, \quad (1)$$

$$-(p_2 u_2')' = f_2(x), \quad x \neq \xi. \quad (2)$$

Первое из них возникает при описании поперечных деформаций классического стержня, а второе – обычной струны (или продольных деформаций стержня). В точке ξ (где, естественно, $0 < \xi < l$)

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00418, Минобразования РФ (КЦ СПбГУ), грант № Е00-1.0-154, и программы “Университеты России”, проект УР.04.01.047.

оба уравнения исключаются, так что фактически (1), (2) – это система четырех уравнений. Однако нас интересуют лишь решения, непрерывно склеенные в точке $x = \xi$, что значит $u_1(\xi - 0) = u_1(\xi + 0)$, $u_2(\xi - 0) = u_2(\xi + 0)$. Более того, в этой точке непрерывно склеены и решения разных уравнений, т.е.

$$u_1(\xi \pm 0) = u_2(\xi \pm 0). \quad (3)$$

В этой же точке мы предполагаем выполненным условие взаимодействия (трансмиссии)

$$\Delta(p_1 u_1'')'(\xi) + \Delta(p_2 u_2')(\xi) = 0, \quad (4)$$

где через $\Delta\varphi(\xi)$ обозначается скачок φ в точке ξ , т.е. $\Delta\varphi(\xi) \doteq \varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0)$. Допуская у $u_1(x)$ потерю гладкости в точке ξ , мы предполагаем при этом

$$(p_1 u_1'')(\xi - 0) = (p_1 u_1'')(\xi + 0) = 0. \quad (5)$$

Последнее при разговоре о стержне соответствует тому, что в точке $x = \xi$ его излома оба его куска шарнирно скреплены (склепаны). Если на концах $x = 0$, $x = l$ отрезка поставить стандартные условия закрепления, т.е.

$$u_1(0) = u_1'(0) = 0, \quad u_1(l) = u_1'(l) = 0, \quad u_2(0) = u_2(l) = 0, \quad (6)$$

то мы можем смотреть в целом на систему (1)–(6) как на краевую задачу, моделирующую, например, деформации небольшого канатного моста. При $f_2 \equiv 0$ второе уравнение (2) вместе с условиями (3), (4) заменяется, как несложно проверить, условием

$$\Delta(p_1 u_1'')'(\xi) + \gamma u_1(\xi) = 0, \quad \gamma > 0,$$

что вместе с (5) приводит (1) к модели двухзвенной цепочки стержней с упругой опорой в месте стыка ($x = \xi$). Подобные нестандартные задачи для одного скалярного уравнения изучались ранее в [1]. В нашей ситуации можно говорить о задаче на графе типа креста, на двух ребрах которого задано уравнение типа (1), а на двух остальных – типа (2). Однако внешне физическое описание более естественно в терминах не четырех, а двух функций, причем заданных на общей области определения.

Можно считать, что f_1 и f_2 есть обобщенные производные ($f_1 = F_1'$, $f_2 = F_2'$) от функций ограниченной вариации. Физичность условий требует предположения $f_1(\xi) = f_2(\xi)$, что в случае скачков F_1 и F_2 в точке ξ означает совпадение атомов меры или – физически – общую для обеих функций u_1 , u_2 сосредоточенную силу.

1. Задача (1)–(6) рассматривается в классе достаточно гладких (при $x \neq \xi$) функций $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ на $[0, l]$. Далее во всех формулировках и условиях мы предполагаем, что $x \neq \xi$ без дополнительных оговорок.

Всюду далее считаем, что $p_1(\cdot)$ и $p_2(\cdot)$ сильно положительны.

ТЕОРЕМА 1. Для любых F_1, F_2 из $BV[0, l]$ задача (1)–(6) однозначно разрешима (при $f_1 = F_1'$ и $f_2 = F_2'$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть F_1 и F_2 – первообразные функций f_1 и f_2 . Тогда для любых неубывающих F_1, F_2 при наличии хотя бы одной точки роста F_1 или F_2 решение $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ строго положительно в $(0, l)$, т.е. $u_1(x) > 0$ и $u_2(x) > 0$ на $(0, l)$. Более того, для любых двух “неотрицательных” пар $\{f_1, f_2\}$ соответствующие им решения $u(x) = \{u_1(x), u_2(x)\}$ и $v(x) = \{v_1(x), v_2(x)\}$ соизмеримы по конусу неотрицательных функций в $C[0, l] \times C[0, l]$, т.е.

$$\sup_{x,s} \frac{u_i(x)}{v_i(x)} \frac{v_i(s)}{u_i(s)} < \infty \quad \text{при } i = 1, 2.$$

Последнее свойство означает усиленную положительную обратимость задачи (1)–(6). Более сильно это свойство можно описать так. Пусть K – конус неотрицательных функций в пространстве $C[0, l] \times C[0, l]$. Пусть A – обратный к задаче (1)–(6) оператор. Стандартным способом проверяется, что он имеет интегральный вид

$$(AF')(x) = \int_0^l G(x, s) dF(s), \quad (7)$$

где $G(x, s)$ – двумерная матрица-функция Грина. Определяемый этой функцией интегральный оператор действует в $E = C[0, l] \times C[0, l]$ и сильно положителен на конусе K .

2. Рассмотрим вместо (1), (2) уравнения

$$(p_1 u_1'')'' = \lambda M_1' u_1, \quad -(p_2 u_2')' = \lambda M_2' u_2, \quad (8)$$

где M_1, M_2 – неубывающие функции, определяющие распределение масс соответственно на стержне и струне. Следующая теорема устанавливается на основе описанного свойства оператора (8).

ТЕОРЕМА 3. Пусть одна из функций $M_1(x), M_2(x)$ имеет хотя бы одну точку роста (т.е. отлична от константы). Тогда минимальное по модулю собственное значение λ_0 задачи (8) при условиях (3)–(6) является строго положительным и простым (корневое пространство одномерно), любая другая точка λ спектра удовлетворяет неравенству $|\lambda| > \lambda_0$. Соответствующая λ_0 собственная функция $u^0(x)$ имеет обе строго положительные (на $(0, l)$) компоненты.

Задача (1)–(6) оказывается самосопряженной в естественном смысле, ее функция-матрица Грина – симметричным положительным ядром. Поэтому весь спектр задачи (8), (3)–(6) состоит из вещественных положительных чисел. По всей видимости, все они простые, а соответствующие им собственные функции имеют (как в классической теории Штурма–Лиувилля) количество перемен знака, совпадающее с номером соответствующего собственного значения (в естественной иерархии). Однако даже набор слов “число перемен знака”, очевидный для скалярных функций, допускает самые разные толкования для вектор-функций, и потому описание осцилляционных свойств собственных функций в рассматриваемом случае есть задача будущего.

3. Функция-матрица Грина $G(x, s)$ задачи (1)–(6) допускает стандартное задание через фундаментальную систему решений однородного “уравнения”

$$(p_1 u_1'')'' = 0, \quad (p_2 u_2')' = 0, \quad x \neq \xi, \quad (9)$$

где, аналогично взглядам теории уравнений на графах (см. библи. в [2]) условия (3)–(5) удобно отнести к определению решения и, более того, к толкованию обобщенного уравнения (9) в точке $x = \xi$. Функция $G(x, s)$ оказывается непрерывной на $[0, l] \times [0, l]$ и строго положительна (по каждой координате) внутри этого квадрата. Следует отметить, что даже непрерывность здесь – весьма не просто проверяемое свойство. Трудности сосредоточены в окрестности прямой $s = \xi$. Подобные трудности нетривиальны даже для скалярных задач с внутренними особенностями.

Для вектор-функции символ “ $\leq$ ” означает у нас синхронное выполнение по обоим компонентам аналогичного скалярного неравенства.

ТЕОРЕМА 4. Существует строго положительная функция $\varphi(x)$ ($= \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$) такая, что $\varphi(x)G(\tau, s) \leq G(x, s)$ при всех x, τ, s из $[0, l]$.

Следствием этого факта для оператора (7) является неравенство $\varphi(x) \max_{\tau} (Az)(\tau) \leq (Az)(x)$ для любой $z(x) \geq 0$, где неравенства (и максимум) понимаются в синхронно-двухкомпонентном плане. Отсюда следует аналог классического свойства Харнака: для любого нетривиального решения $u(x)$ ($= \{u_1(x), u_2(x)\}$) неравенств

$$(p_1 u_1'')'' \geq 0, \quad -(p_2 u_2')' \geq 0$$

при условиях (3)–(6) имеет место $\varphi(x) \max_{\tau} u(\tau) \leq u(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный Ю.В., Мустафокулов Р. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 33. № 10. С. 1358–1365. 2. Покорный Ю.В. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 661–671.

(Ю.В. Покорный) Воронежский государственный университет
(Т.В. Белоглазова) Воронежский государственный университет
(Е.В. Дикарева) Воронежский институт МВД РФ
(Т.В. Перловская) Воронежская лесотехническая академия
E-mail: (Ю.В. Покорный) pokorny@kma.vsu.ru,
(Т.В. Белоглазова) sprite2000@mail.ru

Поступило
27.01.2003