Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Ю. А. Калнишкан, О проблеме Борсука в $\mathbb{R}^3$, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 149–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:59:08

Введение и формулировка результата. В 1933 году К. Борсук (см. [1]) высказал гипотезу о том, что всякое ограниченное d -мерное множество ненулевого диаметра может быть разбито на $d + 1$ часть меньшего диаметра. В дальнейшем различными авторами были получены многочисленные результаты, связанные с этой гипотезой: их подробный обзор может быть найден, скажем, в работе [2], и здесь мы на нем останавливаться не будем. В настоящей заметке мы затронем лишь один важный аспект проблемы Борсука (т.е. проблемы, относящейся к доказательству или опровержению соответствующей гипотезы), а именно мы рассмотрим эту проблему в “малых” размерностях — главным образом, в размерности $d = 3$.

Введем следующую величину:

$$\alpha_d = \sup_{\Omega \subset \mathbb{R}^d} \inf_{\Omega_1, \dots, \Omega_{d+1}} \max_{i=1, \dots, d+1} \text{diam } \Omega_i \in (0, 1].$$

(Здесь точная верхняя грань берется по множествам Ω , диаметр которых равен единице, точная нижняя грань берется по всем разбиениям уже фиксированного множества Ω на $d + 1$ часть; наконец, при взятии последнего максимума выбирается та из этих частей, у которой диаметр наибольший.) Ясно, что, во всяком случае, оценка $\alpha_d < 1$ повлечет за собой доказательство гипотезы Борсука в размерности d . При $d = 1, 2$ задача определения величины α_d решается достаточно просто: тот факт, что $\alpha_1 = 1/2$, практически очевиден, а равенство $\alpha_2 = \sqrt{3}/2 = 0.866 \dots$ принадлежит, по существу, самому Борсуку (см. [1]). В размерности $d = 3$ гипотеза Борсука была впервые доказана Ж. Перкалом и Х. Эгглстоном (см. [3] и [4]), однако из этого доказательства никакой эффективной верхней оценки на α_3 выделить невозможно. Такие оценки были получены позднее П. Капаровой-Карановой [5] ($\alpha_3 \leq 0.999983 \dots$), А. Хепешом [6] ($\alpha_3 \leq 0.99775 \dots$), Б. Грюнбаумом [7] ($\alpha_3 \leq 0.9887$) и В. В. Макеевым [8] ($\alpha_3 \leq 0.98$). В то же время наилучшая известная нижняя оценка $\alpha_3 \geq \sqrt{(3 + \sqrt{3})}/6 = 0.888 \dots$ получается из рассмотрения единичного евклидова шара и восходит к работе Д. Гэйла (см. [9]), в которой, в частности, автор высказывает гипотезу более сильную, чем гипотеза Борсука, предполагая, что $\alpha_3 = 0.888 \dots$ и что в каждой размерности правильное значение величины α_d достигается на шаре (оптимальное разбиение d -мерного шара на $d + 1$ часть меньшего диаметра можно найти, например, в [10]). Заметим, кстати, что неравенство $\alpha_2 \geq \sqrt{3}/2$ также доставляется единичным кругом.

Результаты Капаровой-Карановой, Хепеша, Грюнбаума и Макеева были получены за счет построения так называемых “универсальных покрывающих”, т.е. (в данном случае трехмерных) множеств $\mathcal{U}$ таких, что для любого $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\text{diam } \Omega = 1$, найдется движение φ с условием $\Omega \subset \varphi(\mathcal{U})$.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00912 и № 00-15-96109.

Таким образом, задача разбиения произвольного множества сводилась к задаче разбиения множества $\mathcal{U}$ (см. [2] и [10]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, и $\text{diam } \Omega = 1$. Обозначим через $\rho(\Omega)$ радиус минимального шара, покрывающего множество Ω . Известно, что $1/2 \leq \rho(\Omega) \leq \sqrt{3/8} = 0.612 \dots$ (первое неравенство тривиально, а второе является частным случаем теоремы Юнга [11]). Следующее предложение и следствие из него позволяют на весьма широком классе множеств добиться значительного усиления общего результата Макеева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $1/2 \leq \rho \leq \sqrt{3/8}$, то для всякого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ такого, что $\rho(\Omega) = \rho$, может быть предъявлено разбиение на четыре части, диаметры которых не превосходят величины $\gamma(\rho)$, причем $\gamma(\rho) \rightarrow 0.888 \dots$ при $\rho \rightarrow 1/2$, и $\gamma(\rho) \rightarrow \gamma \approx 0.801 \dots$ при $\rho \rightarrow \sqrt{3/8}$. Более того, существуют константы c_1, c_2 такие, что в рамках предлагаемой процедуры разбиения стремление величины $\gamma(\rho)$ к соответствующим пределам монотонно по $\rho \in [1/2, c_1]$ и $\rho \in [c_2, \sqrt{3/8}]$.

СЛЕДСТВИЕ. Если, например, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ таково, что $\rho(\Omega) \in [1/2, 0.53] \cup [0.6, \sqrt{3/8}]$, то Ω разбивается на четыре части диаметра ≤ 0.96 .

Доказательства предложения и следствия технически довольно громоздки. В следующем пункте мы изложим только их основные идеи. Кроме того, мы дадим ряд существенных замечаний.

Набросок доказательства предложения и некоторые замечания. Центральным моментом доказательства служит введенное Райгородским обобщение понятия универсальной покрывающей — “универсальная покрывающая система” (УПС), которая представляет собой (вообще говоря, бесконечную) совокупность множеств $\{\mathcal{U}\}$ с условием: $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^d, \text{diam } \Omega = 1, \exists \mathcal{U} \in \{\mathcal{U}\}$ такое, что $\Omega \subset \varphi(\mathcal{U})$, φ — движение. В нашем случае (трехмерная, континуальная) УПС строится в рамках следующей процедуры. Сначала фиксируется произвольное $\rho \in [1/2, \sqrt{3/8}]$, рассматривается шар $\mathcal{B}(\rho)$ радиуса ρ и берется любая точка $\mathbf{x}_1 \in \partial \mathcal{B}(\rho)$. Через центр шара $\mathcal{B}(\rho)$ проводится плоскость, параллельная касательной плоскости в точке $\mathbf{x}_1$ и разделяющая поверхность шара на две (замкнутые) полусферы — “нижнюю” (содержащую $\mathbf{x}_1$) и “верхнюю”. В верхней полусфере выбирается произвольная точка $\mathbf{x}_2$, отстоящая на расстояние ≤ 1 от точки $\mathbf{x}_1$. Если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ диаметрально противоположны (что возможно лишь при $\rho = 1/2$), то выбор точек считается завершенным. Иначе снова через центр шара $\mathcal{B}(\rho)$ проводится плоскость, которая на сей раз перпендикулярна кратчайшему отрезку, соединяющему центр и отрезок $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$, и которая по стандартному принципу делит поверхность шара на “верхнюю” и “нижнюю” (замкнутые) полусферы. В верхней полусфере выбирается произвольная точка $\mathbf{x}_3$, отстоящая на расстояние ≤ 1 как от $\mathbf{x}_1$, так и от $\mathbf{x}_2$. Если точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ лежат в центральном сечении шара (что возможно, когда $\rho \leq \sqrt{1/3}$, — ср. теорему Юнга [11]), то их выбор опять-таки считается завершенным. В противном случае последняя, четвертая, точка $\mathbf{x}_4$ берется из верхней полусферы относительно плоскости, проходящей через центр $\mathcal{B}(\rho)$ и параллельной плоскости, которая порождена точками $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. При этом, как и прежде, попарные расстояния между точками $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ не должны превышать 1.

Когда набор точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ построен, ему сопоставляется множество $\mathcal{U}(\rho, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$, являющееся пересечением шара $\mathcal{B}(\rho)$ и двух, трех или четырех шаров радиуса 1 с центрами в точках $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$. В конечном итоге УПС формируется всеми возможными множествами $\mathcal{U}(\rho, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$, получаемыми в рамках описанной выше процедуры. Нетрудно проверить, что, в самом деле, такая система множеств является универсальной покрывающей.

Для завершения доказательства остается, по сути, лишь предъявить надлежащее разбиение на четыре части каждого из множеств $\mathcal{U}(\rho, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$. Однако на практике работать с континуумом множеств оказывается невозможно, так как разбиения приходится искать с помощью компьютерного счета, выполненного Калнишканом. В связи с этим, приходится УПС заменять некоторым дискретным приближением (ρ выбирается с некоторым шагом ε_1 , а точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ берутся из ε_2 -сети на поверхности своего шара $\mathcal{B}(\rho)$) и оценивать возникающую погрешность $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, где ε_3 — компьютерная погрешность. Технически эта часть доказательства весьма сложна, и в настоящей заметке мы ее не приводим.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Описанная выше процедура построения универсальной покрывающей системы легко переносится на размерности $d \geq 4$. В частности, в размерности 4, где вообще нет никакого

окончательного результата в проблеме Борсука, можно доказать предложение, аналогичное трехмерному.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множества, из которых состоит наша универсальная покрывающая система, являются своего рода аналогами так называемых полиэдров Рело (см. [12]). Из предложения видно, что классический полиэдр Рело поддается гораздо лучшему разбиению на четыре части меньшего диаметра, чем шар: предельная константа $\gamma \approx 0.801 \dots < 0.888 \dots$ как раз этому полиэдру и отвечает. В то же время детальные расчеты дают возможность предполагать, что контрпример к гипотезе Гэйла в размерности 3 (если таковой, конечно, существует) следует искать среди (обобщенных) полиэдров Рело, у которых величина радиуса минимального покрывающего шара находится вблизи чисел $0.57 - 0.58$. Во всяком случае, следствие показывает, что если множество доставляет контрпример к гипотезе Гэйла, то радиус минимального шара, покрывающего это множество, заведомо не превосходит некоторой константы, значительно меньшей, чем $\sqrt{3/8}$. Аналогичные выводы можно сделать и о самой гипотезе Борсука. Только к ней, по-видимому, появление контрпримеров нужно ожидать, начиная с размерности 5 или 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Проблема Борсука, традиционно формулируемая в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, может быть также сформулирована, например, для часто возникающего в приложениях пространства $\mathbb{Q}^d$, состоящего из всех рациональных d -мерных векторов и снабженного евклидовой метрикой. В этой ситуации результат, безусловно, будет зависеть от того, как поставлена задача – для ограниченных множеств, для множеств диаметра 1 или, скажем, для множеств диаметра $\sqrt{2}$. Если ограничиться, однако, случаем рационального диаметра, то окажется, что в малых размерностях ситуация складывается значительно проще, чем это было в $\mathbb{R}^d$. Так, например, при $d = 4$ всякое множество $\Omega \subset \mathbb{Q}^d$, имеющее рациональный диаметр, может быть разбито на 4 части меньшего диаметра. При $d = 3$ таких частей и вовсе две. Доказательства опираются на понятие хроматического числа метрического пространства (см. [2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borsuk K. // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 177–190.
2. Райгородский А. М. // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 107–146.
3. Perkal J. // Colloq. Math. 1947. V. 1. P. 45.
4. Eggleston H. G. // J. London Math. Soc. 1955. V. 30. P. 11–24.
5. Katzarowa-Karanowa P. // Arch. Math. 1967. V. 18.
6. Heppes A. // A magyar tudományos akadémi. 1957. V. 7. P. 413–416.
7. Grünbaum V. // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1957. V. 53. P. 776–778.
8. Makeев В. В. // Записки научн. семин. ПОМИ. 1997. №246.
9. Gale D. // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 222–225.
10. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
11. Jung H. W. E. // J. Reine Angew. Math. 1901. V. 123. P. 241–257.
12. Reuleaux F. Lehrbuch der Kinematik I. Vieweg. Braunschweig, 1875.

(А. М. Райгородский) Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
(Ю. А. Калнишкан) Лондон
E-mail: (А. М. Райгородский) araigor@avangard.ru

Поступило
13.11.2002