Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Данилова, В. А. Краснов, Отображение Абеля–Якоби для вещественной гиперэллиптической римановой поверхности рода 3, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 643–651

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm59>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:15:00

УДК 512.7

ОТОБРАЖЕНИЕ АБЕЛЯ–ЯКОБИ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОДА 3

О. В. Данилова, В. А. Краснов

Для вещественных гиперэллиптических римановых поверхностей рода 2 и 3 рассматриваются степени отображения Абеля–Якоби. Изучаются ограничения соответствующих отображений на симметрический квадрат и симметрический куб множества вещественных точек данной римановой поверхности.

Библиография: 4 названия.

Введение. Рассмотрим компактную риманову поверхность S рода g с вещественной структурой $\tau: S \rightarrow S$, где τ – антиголоморфная инволюция. Будем предполагать, что множество вещественных точек $S(\mathbb{R}) = S^\tau$ не пусто. Выберем точку $p_0 \in S(\mathbb{R})$. Тогда определено отображение Абеля–Якоби

$$\mu: S \rightarrow J$$

и оно вещественно, т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\tau} & S \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ J & \xrightarrow{\theta} & J \end{array},$$

где $\theta: J \rightarrow J$ – вещественная структура на многообразии Якоби J , индуцированная вещественной структурой τ на S . Ограничим отображение Абеля–Якоби на вещественные точки поверхности S :

$$\mu: S(\mathbb{R}) \rightarrow J(\mathbb{R}). \quad (1)$$

Это отображение является вложением; оно изучалось в работах В. А. Краснова (см. [1], [2]). В частности, в них было доказано, что отображение (1) переводит разные компоненты связности множества $S(\mathbb{R})$ в разные компоненты связности множества $J(\mathbb{R})$, а также, что образ $\mu(S(\mathbb{R}))$ порождает группу $J(\mathbb{R})$. Последнее утверждение означает, что симметрическая степень отображения (1)

$$\mu^{(k)}: S(\mathbb{R})^{(k)} \rightarrow J(\mathbb{R}) \quad (2)$$

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке фонда INTAS-OPEN, грант № 2000-269.

будет сюръективным отображением при больших k , где $S(\mathbb{R})^{(k)}$ – k -кратное симметрическое произведение множества $S(\mathbb{R})$ на себя, а отображение (2) определяется правилом: если $p_1 + \dots + p_k \in S(\mathbb{R})^{(k)}$, то $\mu^{(k)}(p_1 + \dots + p_k) = \mu(p_1) + \dots + \mu(p_k)$. Возникает вопрос об устройстве отображения (2) при всех k . Соответствующее отображение для множества комплексных точек

$$\mu^{(k)}: S^{(k)} \rightarrow J$$

глубоко изучено (см., например, [3], [4]). В этой статье сделана попытка изучить отображение (2) при $g = 2, 3$. Заметим, что случай $g = 1$ тривиален, а в случае $g = 2$ риманова поверхность S является гиперэллиптической. Этот случай рассмотрен в п. 1, а в п. 2 мы изучаем случай $g = 3$, причем только для гиперэллиптических поверхностей. Отметим также, что мы рассматриваем отображения (2) только при $k \leq g$.

1. Результаты для поверхности рода 2. Итак, пусть $g = 2$; тогда риманова поверхность S обязана быть гиперэллиптической. Действительно, если

$$l_K: S \rightarrow \mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}, \quad p \mapsto [\omega_1(p), \omega_2(p)],$$

– каноническое отображение, где ω_1, ω_2 – базис в $H^0(S, \Omega^1)$, то оно является двулистным накрытием, задающим структуру гиперэллиптической алгебраической кривой. Пусть

$$j: S \rightarrow S$$

– соответствующая инволюция, переставляющая листы этого накрытия. Она является вещественным отображением (т.е. коммутирующим с инволюцией τ), так как каноническое отображение l_K будет вещественным отображением, если выбрать формы ω_1, ω_2 , удовлетворяющие условиям

$$\tau^*(\omega_1) = \overline{\omega}_1, \quad \tau^*(\omega_2) = \overline{\omega}_2.$$

Каноническое отображение

$$l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

имеет шесть точек ветвления; будем сначала предполагать, что среди них есть вещественные точки; их может быть: 2, 4, 6. Будем считать, что фиксированная точка $p_0 \in S(\mathbb{R})$ является точкой ветвления. Рассмотрим тогда отображение

$$\mu^{(2)}: S^{(2)} \rightarrow J.$$

Оно устроено следующим образом (см. [4]): это бирациональное отображение и если Γ – рациональная алгебраическая кривая на $S^{(2)}$, состоящая из точек $p + j(p) \in S^{(2)}$, то при отображении $\mu^{(2)}$ она стягивается в точку $0 \in J$ (т.е. отображение $\mu^{(2)}: S^{(2)} \rightarrow J$ является антисигма процессом).

Таким образом, чтобы разобраться с отображением

$$\mu^{(2)}: S(\mathbb{R})^{(2)} \rightarrow J(\mathbb{R}),$$

нужно выяснить как устроено симметрическое произведение $S(\mathbb{R})^{(2)}$ и найти пересечение $S(\mathbb{R})^{(2)} \cap \Gamma$. Чтобы это сделать, заметим сначала, что гиперэллиптическая инволюция

$$j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$$

переводит каждую компоненту связности (овал) в себя, оставляя при этом две неподвижные точки (они являются точками ветвления). Поэтому мы можем топологически отождествить каждую такую компоненту со стандартной окружностью Σ , заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, на которой инволюция $j: \Sigma \rightarrow \Sigma$ действует отражением относительно оси Ox . Тогда симметрический квадрат $\Sigma^{(2)}$ можно топологически отождествить с листом Мёбиуса M^2 , полученным из квадрата склеиванием с переворотом двух противоположных сторон, а множество точек $p + j(p) \in \Sigma^{(2)}$ отождествляется с линией на листе Мёбиуса, которая получается из этих сторон после склейки. Эту линию обозначим через γ и назовем *отрезком*.

Пусть сначала каноническое отображение $l_k: S \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ имеет только две вещественные точки ветвления. Тогда множество $S(\mathbb{R})$ состоит из одной компоненты связности. Отождествим ее с окружностью Σ ; тогда получим, что симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ является листом Мёбиуса M^2 , причем при отображении $\mu^{(2)}: M^2 \rightarrow J(\mathbb{R})$ отрезок γ стягивается в точку $0 \in J(\mathbb{R})$, вне которого это отображение инъективно.

Пусть теперь каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ имеет четыре вещественные точки ветвления. Тогда множество $S(\mathbb{R})$ состоит из двух компонент связности. Отождествим их с окружностями Σ_1, Σ_2 ; тогда получим, что симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ состоит из двух листов Мёбиуса $M_1^2 = \Sigma_1^{(2)}$, $M_2^2 = \Sigma_2^{(2)}$ и тора $T^2 = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, причем при отображении

$$\mu^{(2)}: M_1^2 \sqcup M_2^2 \sqcup T^2 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

отрезки

$$\gamma_1 \subset M_1^2, \quad \gamma_2 \subset M_2^2$$

стягиваются в точку $0 \in J(\mathbb{R})$, вне которых это отображение инъективно.

Пусть, наконец, каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ имеет шесть вещественных точек ветвления. Тогда множество $S(\mathbb{R})$ состоит из трех компонент связности. Отождествим их с окружностями $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$; тогда получим, что симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ состоит из трех листов Мёбиуса

$$M_1^2 = \Sigma_1^{(2)}, \quad M_2^2 = \Sigma_2^{(2)}, \quad M_3^2 = \Sigma_3^{(2)}$$

и трех торов

$$T_1^2 = \Sigma_1 \times \Sigma_2, \quad T_2^2 = \Sigma_1 \times \Sigma_3, \quad T_3^2 = \Sigma_2 \times \Sigma_3,$$

причем при отображении

$$\mu^{(2)}: M_1^2 \sqcup M_2^2 \sqcup M_3^2 \sqcup T_1^2 \sqcup T_2^2 \sqcup T_3^2 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

отрезки

$$\gamma_1 \subset M_1^2, \quad \gamma_2 \subset M_2^2, \quad \gamma_3 \subset M_3^2$$

стягиваются в точку $0 \in J(\mathbb{R})$, вне которых это отображение инъективно.

Сформулируем полученные утверждения в форме теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ имеет вещественные точки ветвления. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ имеет две вещественные точки ветвления, то симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ является листом Мёбиуса M^2 , причем можно так осуществить топологическое отождествление, что при отображении

$$\mu^{(2)}: M^2 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

отрезок $\gamma \subset M^2$ стягивается в точку $0 \in J(\mathbb{R})$, вне которого это отображение инъективно.

2) Если каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ имеет четыре вещественные точки ветвления, то симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ состоит из двух листов Мёбиуса M_1^2, M_2^2 и тора T^2 , причем можно так осуществить топологическое отождествление, что при отображении

$$\mu^{(2)}: M_1^2 \sqcup M_2^2 \sqcup T^2 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

отрезки

$$\gamma_1 \subset M_1^2, \quad \gamma_2 \subset M_2^2$$

стягиваются в точку $0 \in J(\mathbb{R})$, вне которых это отображение инъективно.

3) Если каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ имеет шесть вещественных точек ветвления, то симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ состоит из трех листов Мёбиуса M_1^2, M_2^2, M_3^2 и трех торов T_1^2, T_2^2, T_3^2 , причем можно так осуществить топологическое отождествление, что при отображении

$$\mu^{(2)}: M_1^2 \sqcup M_2^2 \sqcup M_3^2 \sqcup T_1^2 \sqcup T_2^2 \sqcup T_3^2 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

отрезки

$$\gamma_1 \subset M_1^2, \quad \gamma_2 \subset M_2^2, \quad \gamma_3 \subset M_3^2$$

стягиваются в точку $0 \in J(\mathbb{R})$, вне которых это отображение инъективно.

Осталось разобрать случай, когда двулистное накрытие $l_K: S \rightarrow \mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления. Прежде всего выясним как устроено тогда множество вещественных точек.

ЛЕММА 1.2. Пусть S – вещественная гиперэллиптическая риманова поверхность рода g и $l_K: S \rightarrow \mathbb{CP}^1 = \overline{\mathbb{C}}$ – вещественное каноническое отображение, которое является двулистным накрытием, не имеющим вещественных точек ветвления. Тогда если множество вещественных точек $S(\mathbb{R})$ не пусто, то оно состоит из одной компоненты связности при g четном; в противном случае оно состоит из двух компонент связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ – дивизор ветвления для двулистного накрытия $l_K: S \rightarrow \mathbb{C}P^1 = \overline{\mathbb{C}}$. Тогда он состоит из $2(g+1)$ точек, половина которых находится в верхней полусфере, а другая половина получается из первой с помощью комплексного сопряжения. Отображение $l_K: S \setminus j^{-1}(D) \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ является двулистным накрытием без точек ветвления; для него определен характеристический класс $w_1 \in H^1(\overline{\mathbb{C}} \setminus D, \mathbb{F}_2)$. Его значение на кривой $\alpha \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ по определению равно 0, если ограничение накрытия на эту кривую тривиально; в противном случае оно равно 1. Поэтому если кривая α охватывает m точек дивизора D , то значение характеристического класса w_1 на этой кривой равно $m \pmod{2}$. Так как кривая $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{C}P^1$ охватывает $g+1$ точку дивизора D , ограничение накрытия на $\mathbb{R}P^1$ нетривиально только при g четном. Таким образом, двулистное накрытие $l_K: S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}P^1$ нетривиально только при g четном; следовательно, множество $S(\mathbb{R})$ состоит из одной компоненты, если g четно, а при g нечетном оно состоит из двух компонент. Лемма доказана.

Таким образом, в случае $g = 2$ из отсутствия вещественных точек ветвления вытекает, что множество $S(\mathbb{R})$ состоит из одной компоненты связности, причем гиперэллиптическая инволюция

$$j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$$

не имеет неподвижных точек. Поэтому мы можем топологически отождествить эту компоненту со стандартной окружностью Σ , заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$, на которой инволюция $j: \Sigma \rightarrow \Sigma$ действует отражением относительно начала координат O . Тогда симметрический квадрат $\Sigma^{(2)}$ можно топологически отождествить с листом Мёбиуса M^2 , а множество точек $p + j(p) \in \Sigma^{(2)}$ отождествляется со средней линией на листе Мёбиуса. Так как вещественных точек ветвления нет, выбранная точка $p_0 \in S(\mathbb{R})$ не является точкой ветвления. Положим $\mu(j(p_0)) = q_0 \in J(\mathbb{R})$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления. Тогда симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ является листом Мёбиуса M^2 , причем можно так осуществить топологическое отождествление, что при отображении

$$\mu^{(2)}: M^2 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

средняя линия листа Мёбиуса стягивается в точку $q_0 \in J(\mathbb{R})$, вне которой это отображение инъективно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим множество вещественных точек симметрического квадрата $S^{(2)}$, т.е. множество $S^{(2)}(\mathbb{R})$. Оно состоит из множества $S(\mathbb{R})^{(2)}$ и топологической поверхности с краем T , которая состоит из точек $p + \tau(p)$. Поверхность T равна факторпространству S/τ . Ее край состоит из овалов множества вещественных точек $S(\mathbb{R})$. Листы Мёбиуса, которые входят в состав множества $S(\mathbb{R})^{(2)}$, приклеены к поверхности T по этим овалам; в результате получается топологическая поверхность $\tilde{T}$ без края; вместе с торами из множества $S(\mathbb{R})^{(2)}$ поверхность $\tilde{T}$ образует множество $S^{(2)}(\mathbb{R})$. Вещественные точки стягиваемой рациональной кривой Γ частично лежат на листах Мёбиуса, а частично на поверхности T (в случае, когда каноническое отображение не имеет вещественных точек ветвления, все вещественные точки стягиваемой рациональной кривой Γ лежат на листе Мёбиуса).

2. Результаты для поверхности рода 3. Итак, пусть $g = 3$ и поверхность S гиперэллиптическая. В этом случае каноническое отображение

$$l_K: S \rightarrow \mathbb{C}P^1 = \overline{\mathbb{C}}$$

является двулистным накрытием с восемью точками ветвления, и пусть $j: S \rightarrow S$ — гиперэллиптическая инволюция, переставляющая листы этого накрытия. Будем сначала предполагать, что имеется $2m$, $1 \leq m \leq 4$, вещественных точек ветвления. В этом случае в качестве фиксированной точки p_0 берем вещественную точку ветвления. Обозначим образ отображения

$$\mu^{(2)}: S^{(2)} \rightarrow J$$

через W . Тогда отображение

$$\mu^{(2)}: S^{(2)} \rightarrow W$$

является бирациональным отображением, при котором рациональная кривая $\Gamma \subset S^{(2)}$, состоящая из точек $p + j(p)$, стягивается в невырожденную квадратичную особую точку $0 \in W$ (см. [4]). Рассуждения, которые привели к теореме 1.1, показывают, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ имеет $2m$ вещественных точек ветвления. Тогда симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ можно топологически отождествить с несвязной суммой листов Мёбиуса и торов*

$$S(\mathbb{R})^{(2)} = \left(\bigsqcup_{i=1}^m M_i^2 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{1 \leq i < j \leq m} T_{ij}^2 \right),$$

причем это можно сделать так, что при отображении

$$\mu^{(2)}: S(\mathbb{R})^{(2)} \rightarrow W(\mathbb{R})$$

отрезки $\gamma_i \subset M_i^2$, $1 \leq i \leq m$, стягиваются в точку $0 \in W(\mathbb{R})$, а вне них отображение инъективно.

Аналог теоремы 1.3 формулируется уже по-другому. Действительно, из леммы 1.2 вытекает, что если каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления, то множество вещественных точек состоит из двух компонент связности, причем гиперэллиптическая инволюция их переставляет. Отождествим одну из них со стандартной окружностью Σ , а вторую компоненту отождествим с первой с помощью инволюции $j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$. Тогда получим, что симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ состоит из двух листов Мёбиуса M_1^2, M_2^2 и тора $T^2 = \Sigma \times \Sigma$, причем множество точек $p + j(p)$ лежит на торе и образует на нем диагональ $\Delta \subset T^2$. Следовательно, справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления. Тогда симметрический квадрат $S(\mathbb{R})^{(2)}$ можно топологически отождествить с несвязной суммой двух листов Мёбиуса M_1^2, M_2^2 и тора $T^2 = \Sigma \times \Sigma$

$$S(\mathbb{R})^{(2)} = M_1^2 \sqcup M_2^2 \sqcup T^2,$$

причем это можно сделать так, что при отображении

$$\mu^{(2)}: S(\mathbb{R})^{(2)} \rightarrow W(\mathbb{R})$$

диагональ $\Delta \subset T^2$ стягивается в точку $q_0 = \mu(j(p_0)) \in W(\mathbb{R})$, а вне ее отображение инъективно.

Перейдем теперь к изучению отображения

$$\mu^{(3)}: S(\mathbb{R})^{(3)} \rightarrow J(\mathbb{R}). \quad (3)$$

Прежде чем сформулировать полученные результаты, введем дополнительные обозначения. В симметрическом кубе $S^{(3)}$ рассмотрим множество Φ , состоящее из точек $p + j(p) + q$. Это множество является образом отображения-вложения

$$\Gamma \times S \rightarrow S^{(3)},$$

определенного правилом $(p + j(p), q) \mapsto p + j(p) + q$, поэтому мы будем отождествлять его с тривиальной линейчатой комплексной поверхностью $\Gamma \times S$. Отображение

$$\mu^{(3)}: S^{(3)} \rightarrow J$$

бirationально и стягивает вдоль слоев $\Gamma \times q$ линейчатую поверхность Φ на кривую $q_0 + \mu(S)$, где $q_0 = \mu(j(p_0))$ (см. [4]). Таким образом, чтобы изучить отображение (3), нужно выяснить как устроено симметрическое произведение $S(\mathbb{R})^{(3)}$ и найти пересечение $S(\mathbb{R})^{(3)} \cap \Phi$.

Сначала рассмотрим случай, когда каноническое отображение

$$l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

имеет вещественные точки ветвления. Тогда в качестве точки p_0 берем вещественную точку ветвления. Следовательно, в этом случае $q_0 = 0$. Каждую компоненту связности множества $S(\mathbb{R})$ отождествим со стандартной окружностью Σ , на которой рассматривается стандартная инволюция $j: \Sigma \rightarrow \Sigma$, т.е. отражение относительно оси Ox . Итак, пусть множество $S(\mathbb{R})$ состоит из окружностей Σ_i , $1 \leq i \leq m$. Тогда рассмотрим три вида топологических тел:

$$\begin{aligned} V_i^3 &= \Sigma_i^{(3)}, \quad V_{ij}^3 = \Sigma_i^{(2)} \times \Sigma_j, \quad i \neq j, \\ V_{ijk}^3 &= \Sigma_i \times \Sigma_j \times \Sigma_k, \quad i < j < k. \end{aligned}$$

Каждое тело V_{ijk}^3 является трехмерным тором; каждое тело V_{ij}^3 представляет собой произведение листа Мёбиуса на окружность. Если мы рассмотрим стандартное отображение тела $V_{ijk}^3 = (\mathbb{R}P^1)^{(3)}$ в $\mathbb{R}P^3$, построенное с помощью симметрических функций, то получим, что каждое тело V_{ijk}^3 получается из проективного пространства выбрасыванием полнотория. Таким образом, имеем разложение симметрического куба на рассмотренные тела

$$S(\mathbb{R})^{(3)} = \left(\bigsqcup_{i=1}^m V_i^3 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i \neq j} V_{ij}^3 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i < j < k} V_{ijk}^3 \right).$$

Вычислим теперь пересечение этого симметрического куба с линейчатой поверхностью Φ . Пересечение линейчатой поверхности Φ с тором V_{ijk}^3 пусто. Так как $V_{ij}^3 = M_i^2 \times \Sigma_j$, пересечение с телом V_{ij}^3 равно цилиндру $\gamma_i \times \Sigma_j$. Покажем, что аналогично устроено пересечение с телом V_i^3 , т.е. оно равно произведению $\gamma_i \times \Sigma_i$. Для этого рассмотрим отображение

$$\gamma_i \times \Sigma_i \rightarrow V_i^3,$$

заданное правилом $(p + j(p), q) \mapsto p + j(p) + q$; оно является вложением, поэтому можно отождествить пересечение $V_i^3 \cap \Phi$ с цилиндром $\gamma_i \times \Sigma_i$. После этих вычислений получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ имеет $2m$ вещественных точек ветвления. Тогда симметрический куб $S(\mathbb{R})^{(3)}$ можно топологически отождествить с несвязной суммой тел*

$$S(\mathbb{R})^{(3)} = \left(\bigsqcup_{i=1}^m V_i^3 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i \neq j} V_{ij}^3 \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i < j < k} V_{ijk}^3 \right),$$

причем это можно сделать так, что при отображении

$$\mu^{(3)}: S(\mathbb{R})^{(3)} \rightarrow J(\mathbb{R})$$

цилиндры $\gamma_i \times \Sigma_i \subset V_i^3$, $\gamma_i \times \Sigma_j \subset V_{ij}^3$ стягиваются вдоль отрезков γ_i на кривые $\mu(\Sigma_i)$, $\mu(\Sigma_j)$, а вне этих цилиндров отображение инъективно.

Перейдем к рассмотрению случая, когда каноническое отображение

$$l_K: S \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$$

не имеет вещественных точек ветвления. Тогда множество вещественных точек $S(\mathbb{R})$ состоит из двух овалов, причем инволюция $j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ переставляет эти овалы. Мы отождествили эти овалы со стандартными окружностями Σ_1, Σ_2 , причем инволюция $j: S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ отождествляет их друг с другом. Множество $S(\mathbb{R})^{(3)}$ тогда состоит из тел

$$V_1^3 = \Sigma_1^{(3)}, \quad V_2^3 = \Sigma_2^{(3)}, \quad V_{12}^3 = \Sigma_1^{(2)} \times \Sigma_2, \quad V_{21}^3 = \Sigma_2^{(2)} \times \Sigma_1.$$

Тела V_1^3, V_2^3 не пересекаются комплексной линейчатой поверхностью Φ , а пересечение $V_{12}^3 \cap \Phi$ состоит из множества точек $p + j(p) + q$, где $p, q \in \Sigma_1$. Множество точек $p + j(p) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ образует диагональ тора $\Delta_1 = \Sigma_1 \times \Sigma_2 = \Sigma_1 \times \Sigma_1$, если мы

отождествим Σ_1 с Σ_2 с помощью отображения $j: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$. Следовательно, множество точек $p + j(p) + q$ образует тор $\Delta_1 \times \Sigma_1$, и при отображении

$$\mu^{(3)}: \Delta_1 \times \Sigma_1 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

он стягивается вдоль Δ_1 на кривую $q_0 + \mu(\Sigma_1)$. Аналогично, пересечение $V_{21}^3 \cap \Phi$ является тором $\Delta_2 \times \Sigma_2$, который при отображении

$$\mu^{(3)}: \Delta_2 \times \Sigma_2 \rightarrow J(\mathbb{R})$$

стягивается вдоль Δ_2 на кривую $q_0 + \mu(\Sigma_2)$. После этих вычислений получаем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть каноническое отображение $l_K: S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ не имеет вещественных точек ветвления. Тогда симметрический куб $S(\mathbb{R})^{(3)}$ можно топологически отождествить с несвязной суммой тел

$$S(\mathbb{R})^{(3)} = V_1^3 \sqcup V_2^3 \sqcup V_{12}^3 \sqcup V_{21}^3,$$

причем это можно сделать так, что при отображении

$$\mu^{(3)}: S(\mathbb{R})^{(3)} \rightarrow J(\mathbb{R})$$

торы $\Delta_1 \times \Sigma_1$, $\Delta_2 \times \Sigma_2$ стягиваются вдоль Δ_1, Δ_2 на кривые $q_0 + \mu(\Sigma_1)$, $q_0 + \mu(\Sigma_2)$, а вне этих торов отображение инъективно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим множество вещественных точек симметрического куба $S^{(3)}$, т.е. множество $S^{(3)}(\mathbb{R})$. Оно состоит из множества $S(\mathbb{R})^{(3)}$ и топологического тела с краем V , который состоит из точек $p + \tau(p) + q$, где $p \in S$, $q \in S(\mathbb{R})$. Таким образом, тело V равно произведению $T \times S(\mathbb{R})$, где $T = S/\tau$. Край тела V состоит из торов, а тела с краем, которые входят в состав множества $S(\mathbb{R})^{(3)}$, приклеены к телу V по этим торам, в результате получается топологическое тело $\tilde{V}$ без края; вместе с оставшимися телами из множества $S(\mathbb{R})^{(3)}$ тело $\tilde{V}$ образует множество $S^{(3)}(\mathbb{R})$. Вещественные точки стягиваемой комплексной линейчатой поверхности Φ частично лежат на телах из $S^{(3)}(\mathbb{R})$, а частично на теле V .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 365–374.
- [2] Краснов В. А. Отображение Альбанезе для GMZ-многообразий // Матем. заметки. 1984. Т. 35. № 5. С. 739–747.
- [3] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. I. М.: Мир, 1982.
- [4] Mumford D. Curves and their Jacobians. Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1975.