Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Ромащенко, Инвариантные и гиперинвариантные подпространства оператора J^α в пространствах Соболева $W_p^s[0, 1]$, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 151–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:
IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:37:02

ИНВАРИАНТНЫЕ И ГИПЕРИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРА J^α В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $W_p^s[0, 1]$

Г.С. Ромащенко

1. Введение. Хорошо известно [1]–[3], что интегральный вольтерров оператор

$$J: f \rightarrow \int_0^x f(t) dt,$$

является одноклеточным в $L_p[0, 1]$ при $p \in [1, \infty)$, а решетка его инвариантных подпространств

© Г.С. РОМАЩЕНКО 2003

имеет вид $\text{Lat } J^\alpha = \text{Hyplat } J^\alpha = \{E_a := \chi_{[a,1]} L_p[0,1] : 0 \leq a \leq 1\}$. Этот факт имеет место и для степеней оператора интегрирования J :

$$J^\alpha : f \rightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt, \quad \text{Re } \alpha > 0.$$

Э. Р. Цекановский [4] доказал одноклеточность оператора интегрирования J_k , действующего в соболевском пространстве $W_2^k[0,1]$, и описал решетку $\text{Lat } J_k$ его инвариантных подпространств.

И. Ю. Доманов и М. М. Маламуд [5] описали решетки $\text{Lat } J_k^\alpha$ и $\text{Hyplat } J_k^\alpha$ инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора J_k^α , определенного в $W_p^k[0,1]$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, а также исследовали операторную алгебру $\text{Alg } J_k^\alpha$, коммутант $\{J_k^\alpha\}'$ и бикоммутант $\{J_k^\alpha\}''$. В частности, в [5] показано, что оператор J_k^α не является одноклеточным при $\alpha \neq 1$ (и $k > 1$).

В [6] результаты из [5] обобщены на случай пространств Лиувилля $L_p^s[0,1]$ ($s \in \mathbb{R}_+$). Выяснилось, в частности, что при $s \in [k, k+1)$ описания коммутантов $\{J_s^\alpha\}'$ и $\{J_k^\alpha\}'$, а также бикоммутантов $\{J_s^\alpha\}''$ и $\{J_k^\alpha\}''$, совпадают.

Цель данной работы – описать решетки $\text{Lat } J_s^\alpha$ и $\text{Hyplat } J_s^\alpha$ инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора J_s^α , действующего в соболевском пространстве $W_p^s[0,1]$ ($s \in \mathbb{R}_+$), а также исследовать алгебру $\text{Alg } J_s^\alpha$, коммутант $\{J_s^\alpha\}'$ и бикоммутант $\{J_s^\alpha\}''$. В работе применяется и развивается метод, предложенный в [5]. Заметим, что описание решеток $\text{Lat } J_s^\alpha$ и $\text{Hyplat } J_s^\alpha$ существенно зависит от показателя вложения пространства $W_p^s[0,1]$ в $C^k[0,1]$. Так, решетка $\text{Lat } J_s^\alpha$ изоморфна решетке $\text{Lat } J_k^\alpha$ ($k = [s]$) при $s - k \leq 1/p$ и изоморфна решетке $\text{Lat } J_{k+1}^\alpha$ при $s - k > 1/p$.

Пусть $s \in \mathbb{R}_+$, $s = [s] + \varepsilon$. Обозначим $W_p^s[0,1]$ – соболевское пространство с дробным показателем (см. определение в [7]).

Пусть $C_0^\infty[0,1] = \{f \in C^\infty[0,1] : f^{(j)}(0) = 0, j \in \mathbb{Z}_+\}$. Обозначим $W_{p,0}^s[0,1]$ – замыкание линеала $C_0^\infty[0,1]$ в пространстве $W_p^s[0,1]$.

2. Циклические подпространства оператора J^α . Обозначим через $J_{s,0}^\alpha$ и J_s^α операторы J^α , действующие в пространствах $W_{p,0}^s[0,1]$ и $W_p^s[0,1]$ соответственно.

ЛЕММА 2.1. Оператор $J_{s,0}^\alpha$ ограничен в пространстве $W_{p,0}^s[0,1]$, если $\text{Re } \alpha > 0$.

ЛЕММА 2.2. Оператор J_s^α ограничен в пространстве $W_p^s[0,1]$, если либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\text{Re } \alpha > s - 1/p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 ([3]). Подпространство E B -пространства X называют *циклическим подпространством* оператора $T \in [X]$, если $\text{span}\{T^n E : n \geq 0\} = X$. Множество всех циклических подпространств оператора T обозначают $\text{Cyc}(T)$. Вектор $f \in X$ называют *циклическим* для T , если $E := \{\lambda f : \lambda \in \mathbb{C}\} \in \text{Cyc}(T)$. Оператор T называют *циклическим*, если $\mu_T = 1$, $\mu_T := \inf_E \{\dim E : E \in \text{Cyc}(T)\}$ – спектральная кратность оператора T в X .

ЛЕММА 2.4. Оператор $J_{s,0}^\alpha$ цикличесен при $\text{Re } \alpha > 0$ и верна эквивалентность

$$f \in \text{Cyc } J_{s,0}^\alpha \iff \int_0^\varepsilon |f(x)|^p dx > 0 \quad \text{для всех } \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Обозначим

$$k = \begin{cases} [s] & \text{при } s - [s] \leq 1/p, \\ [s] + 1 & \text{при } s - [s] > 1/p. \end{cases} \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. 1) Спектральная кратность $\mu_{J_s^\alpha}$ оператора J_s^α равна

$$\mu := \mu_{J_s^\alpha} = \begin{cases} \min\{\alpha, k\}, & \alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, \\ k, & \alpha \notin \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (3)$$

2) Система $\{f_j\}_1^N$ векторов $f_j \in W_p^s[0,1]$ порождает циклическое подпространство оператора J_s^α тогда и только тогда, когда:

- i) $N \geq \mu$
- ii) $\text{rank } W_\mu\{f_1, \dots, f_N\}(0) = \mu$, где

$$W_\mu\{f_1, \dots, f_N\}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_N(x) \\ f'_1(x) & \dots & f'_N(x) \\ f_1^{(\mu-1)}(x) & \dots & f_N^{(\mu-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в силу теоремы вложения [7] пространство $W_p^s[0, 1]$ непрерывно вложено в $C^{[s]}[0, 1]$ при $\{s\} > 1/p$. Поэтому коразмерность подпространства $W_{p,0}^s[0, 1]$ в $W_p^s[0, 1]$ равна

$$\dim W_p^s[0, 1]/W_{p,0}^s[0, 1] = \begin{cases} [s] & \text{при } \{s\} = s - [s] \leq 1/p, \\ [s] + 1 & \text{при } \{s\} = s - [s] > 1/p. \end{cases}$$

3. Инвариантные подпространства оператора J^α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть X – B -пространство. Оператор $T \in [X]$ называют *одноклочным*, если решетка его инвариантных подпространств $\text{Lat } T$ упорядочена по вложению.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\text{Re } \alpha > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Lat } J_{s,0}^\alpha &= \{E_a^s : 0 \leq a \leq 1\}, \\ E_a^s &= \{f \in W_{p,0}^s[0, 1] : f(x) = 0 \text{ при } x \in [0, a]\}, \end{aligned} \quad (4)$$

и, следовательно, $J_{s,0}^\alpha$ одноклочен.

Для описания $\text{Lat } J_s^\alpha$ используется описание решетки $\text{Lat } Q$ нильпотентного оператора $Q \in [\mathbb{C}^k]$, полученное Л. Брикманом и П. А. Филлмором [8].

В следующей теореме описана решетка $\text{Lat } J_s^\alpha$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть π – фактор-отображение

$$\pi : W_p^s[0, 1] \rightarrow X_k := W_p^s[0, 1]/W_{p,0}^s[0, 1],$$

и $\hat{J}_s^\alpha$ – фактор-оператор в X_k , где k определено в (2). Тогда $\text{Lat } J_s^\alpha = \text{Lat}^c J_s^\alpha \cup \text{Lat}^d J_s^\alpha$, где

$$\text{Lat}^c J_s^\alpha = \{E_a^s : 0 \leq a \leq 1\}, \quad E_a^s = \{f \in W_{p,0}^s[0, 1] : f(x) = 0 \text{ для } x \in [0, a]\} \quad (5)$$

– “непрерывная часть” $\text{Lat } J_s^\alpha$;

$$\text{Lat}^d J_s^\alpha = \pi^{-1}(\text{Lat } \hat{J}_s^\alpha) = \bigcup_M \pi^{-1}\{[M, (\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M] : M \in \text{Lat}(\hat{J}_s^\alpha \mid \hat{J}_s^\alpha M)\} \quad (6)$$

– “дискретная часть” $\text{Lat } J_s^\alpha$.

Здесь $[M, (\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M]$ – замкнутый отрезок решетки всех подпространств в X_k . Каждый отрезок удовлетворяет уравнению $\dim(\hat{J}_s^\alpha)^{-1}M - \dim M = d$, где $d = \min\{-[-\alpha], k\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $0 < s \leq 1 + 1/p$ и $\text{Re } \alpha > s - 1/p$. Тогда

$$\text{Lat } J_s^\alpha = \text{Lat } J_{s,0}^\alpha \cup W_p^s[0, 1] = \{E_a^s : 0 \leq a \leq 1\} \cup W_p^s[0, 1].$$

В частности, оператор J_s^α одноклочен в $W_p^s[0, 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть $s > 1 + 1/p$ и либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\text{Re } \alpha > s - 1/p$. Тогда

- 1) оператор J_s^α одноклочен в $W_p^s[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 1$;
- 2) $\text{Lat } J_s = \text{Lat}^c J_s \cup \text{Lat}^d J_s$, где $\text{Lat}^c J_s$ определяется соотношениями (5) и

$$\text{Lat}^d J_s = \{W_{p,0}^s[0, 1] = E_0^s \subset E_1^s \subset \dots \subset E_k^s := W_p^s[0, 1]\},$$

где $E_l^s := \text{span}\{W_{p,0}^s[0, 1], x^{k-1}, \dots, x^{k-l}\}$, $l \in \{1, \dots, k\}$; значение k определено в (2).

4. Коммутант $\{J_s^\alpha\}'$ и решетка Hyplat J_s^α . Как обычно, $\{T\}'$ обозначает коммутант оператора $T \in [X]$, определенного на B -пространстве X : $\{T\}' = \{R \in [X]: RT = TR\}$. Подпространство $E \in \text{Lat } T$ называют *гиперинвариантным* для T , если E инвариантно для коммутанта $\{T\}'$. Hyplat T обозначает решетку всех гиперинвариантных подпространств T .

Говорят, что решетка Hyplat T *одноклеточна*, если она линейно упорядочена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\text{Re } \alpha > 0$. Тогда $R \in \{J_{s,0}^\alpha\}'$ тогда и только тогда, когда R ограничен и

$$(Rf)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x r(x-t)f(t) dt, \quad r(x) \in L_{p'}[0, 1], \quad (p')^{-1} + p^{-1} = 1.$$

Доказательство основано на описании коммутанта $\{J^\alpha\}'$ оператора J^α в пространствах $L_p[0, 1]$, полученном Маламудом в [9].

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть либо $\alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, либо $\text{Re } \alpha > s - 1/p$. Тогда и только тогда $R \in \{J_s^\alpha\}'$, когда

$$(Rf)(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x r(x-t)f(t) dt, \quad r(x) \in W_p^s[0, 1].$$

В частности, $\{J_s^\alpha\}'$ является коммутативной алгеброй и не зависит от α .

Так же, как в [5], в доказательстве используется блочно-матричное представление оператора J^α относительно разложения $W_p^s[0, 1] = W_{p,0}^s[0, 1] \dot{+} X_k$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Бикоммутант $\{J_s^\alpha\}''$ оператора J_s^α совпадает с его коммутантом: $\{J_s^\alpha\}'' = \{J_s^\alpha\}' = \{J_s\}' = \{J_s\}''$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Решетка Hyplat J_s^α одноклеточна: $\text{Hyplat } J_s^\alpha = \text{Lat } J_s$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. 1) Если $\alpha = 1$ или $s \leq 1 + 1/p$, то $\text{Alg } J_s^\alpha = \{J_s^\alpha\}''$.

2) Если $1 + 1/p < \alpha \leq s$, то $\text{Alg } J_s^\alpha = \{T = cI + R: c \in \mathbb{C}, R \in \text{Alg}_0 J_s^\alpha\}$, где $\text{Alg}_0 J_s^\alpha = \{R: Rf = r * f, r \in W_p^{s-1}[0, 1], r^{(j)}(0) = 0 \text{ для } j \neq i\alpha - 1, i \leq [\frac{s}{\alpha}]\}$.

3) Если $s > 1 + 1/p$ и $\text{Re } \alpha > s - 1/p$, то $\text{Alg } J_s^\alpha = \{T = cI + R: c \in \mathbb{C}, Rf = r * f, r \in W_{p,0}^{s-1}[0, 1]\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
3. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
4. Цекановский Э. Р. // УМН. 1965. Т. 6(126). С. 169–172.
5. Domtanov I. Yu., Malamud M. M. // Linear Algebra Appl. 2002. V. 348. № 1–3. P. 209–230.
6. Ромашенко Г. С. // Доп. НАН України. 2003. Т. 3.
7. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
8. Brikman L., Fillmore P. A. // Canad. J. Math. 1967. V. 19. P. 810–822.
9. Malamud M. M. // Operator Theory: Advances and Applications. 1998. V. 102. P. 143–167.