Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Тлеуханова, Интерполяционная формула для функций многих переменных, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 1, 154–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:01:09

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. Т. Тлеуханова

В данной работе изучается задача о приближенном восстановлении функции многих переменных из пространств Соболева $W_p^\alpha[0, 1]^n$ и Коробова $E^\alpha[0, 1]^n$ по ее значениям в некоторых узлах.

© Н. Т. ТЛЕУХАНОВА 2003

В отличие от известных работ [1]–[10], в данной статье для произвольной размерности n интерполяционная формула выписывается в явном виде.

Мультииндексу $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ сопоставим $\nu(\mu) = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ так, чтобы при $|\mu_i| > 0$ имело место $2^{\nu_i(\mu)-3} \leq |\mu_i| < 2^{\nu_i(\mu)-2}$, $i = 1, \dots, n$, а при $|\mu_i| = 0$ положим $\nu_i(\mu) = 0$.

Определим функционал $P_{2^m}(f; \mu)$ следующим образом:

$$P_{2^m}(f; \mu) = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_j \geq \nu_j}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j + \text{sgn}(k_j - \nu_j))} \\ \times f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) e^{2\pi i \sum_{i=1}^n \mu_i r_i / 2^{k_i}}.$$

Этот функционал является конечной линейной комбинацией значений функции f , а коэффициенты линейной комбинации принимают значения $1/2^m$ либо $-1/2^m$.

Определим множество

$$\Delta_m = \bigcup_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_j \geq 2}} Q_k,$$

где $Q_k = \{r \in \mathbb{Z}^n : |r_i| < 2^{k_i-3}, i = 1, \dots, n\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{\mu \in \Delta_m} \hat{f}(\mu) e^{2\pi i \mu x}$. Тогда функционал $P_{2^m}(f; \mu)$ точно восстанавливает коэффициенты полинома, т.е.

$$\hat{f}(\mu) = P_{2^m}(f; \mu).$$

Через $E_{\Delta_m}(f)_{E^\alpha[0,1]^n}$, $E_{\Delta_m}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}$ обозначим наилучшие приближения функции f из соответствующих классов тригонометрическими полиномами с гармониками из множества Δ_m .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Если $\alpha > 1$, $f \in E^\alpha[0, 1]^n$, то

$$|\hat{f}(\mu) - P_{2^m}(f; \mu)| \leq C \frac{(m - \sum_{j=1}^n \nu_j(\mu))^{n-1}}{2^{m\alpha}} E_{\Delta_m}(f)_{E^\alpha[0,1]^n}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p \leq \infty$, $r = \min(p, 2)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1/r$, $f \in E^\alpha[0, 1]^n$. Тогда

$$|\hat{f}(\mu) - P_{2^m}(f; \mu)| \leq C \frac{(m - \sum_{j=1}^n \nu_j(\mu))^{\frac{n-1}{r}}}{2^{m\alpha}} E_{\Delta_m}(f)_{W_p^\alpha[0,1]^n}.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$Q_k = \{r \in \mathbb{Z}^n : |r_j| \leq 2^{k_j-1}, j = 1, 2, \dots, n\} \setminus \{(\pm[2^{k_1-1}], \dots, \pm[2^{k_n-1}])\}$$

– целочисленный параллелепипед в котором исключены вершины. Множество

$$G_m = \bigcup_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m+1 \\ k \in \mathbb{Z}_+^n}} Q_k,$$

назовем *ступенчатым гиперболическим крестом порядка m* .

Для функции $f \in C[0, 1]^n$ определим оператор

$$F_{2^m}(f; x) = \sum_{\mu \in G_m} P_{2^m}(f; \mu) e^{2\pi i \mu x} \\ = \sum_{\mu \in G_m} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = m \\ k_j \geq \nu_j(\mu)}} \frac{1}{2^m} \sum_{r_1=0}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{r_n=0}^{2^{k_n}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} (r_j + \text{sgn}(k_j - \nu_j))} \\ \times f\left(\frac{r_1}{2^{k_1}}, \dots, \frac{r_n}{2^{k_n}}\right) e^{2\pi i \mu(r/2^k + x)}. \quad (1)$$

Данный оператор является оператором восстановления функции f по ее значениям в $M = O(m^{(n-1)2^m})$ узлах.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $2 \leq q \leq \infty$, $q' = q/(q-1)$, $\alpha > 1$, $f \in E^\alpha[0, 1]^n$, G_m – ступенчатый гиперболический крест порядка m . Тогда

$$\|f - F_{2^m}(f; x)\|_{L_q} \leq C_{q, \alpha} \frac{m^{\frac{n-1}{q}}}{2^{m(\alpha - \frac{1}{q'})}} E_{\Delta_m}(f)_{E^\alpha[0, 1]^n}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть M количество узлов в интерполяционной формуле (1), $2 \leq q \leq \infty$, $q' = q/(q-1)$, $\alpha > 1$. Тогда

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha} = 1} \|f - F_{2^m}(f; \cdot)\|_{L_q} \sim \frac{(\ln M)^{(n-1)\alpha}}{M^{(\alpha - \frac{1}{q'})}}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$, $f \in W_p^\alpha[0, 1]^n$, $\alpha > 1/p$, $1/r = 1/p - 1/q$, G_m – ступенчатый гиперболический крест. Тогда имеет место оценка

$$\|f - F_{2^m}(f; x)\|_{L_q} \leq C_{q, p, \alpha} \frac{m^{\frac{n-1}{r}}}{2^{m(\alpha - \frac{1}{r})}} E_{\Delta_m}(f)_{W_p^\alpha[0, 1]^n}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть M количество узлов в интерполяционной формуле (1), $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 1/p$, $1/r = 1/p - 1/q$. Тогда

$$\sup_{\|f\|_{W_p^\alpha} = 1} \|f - F_{2^m}(f; \cdot)\|_{L_q} \sim \frac{(\ln M)^{(n-1)\alpha}}{M^{(\alpha - \frac{1}{r})}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
2. Hlawka E. // Monatsh. Math. 1962. V. 66. P. 140–151.
3. Wang Yuan // Contemp. Math. 1988. V. 77. P. 63–82.
4. Смоляк С. А. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. № 5. С. 1028–1031.
5. Смоляк С. А. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
6. Темляков В. Н. // Ann. Math. 1986. V. 12. № 4. P. 287–305.
7. Темляков В. Н. // Матем. сб. 1985. Т. 128. № 2. С. 256–268.
8. Темляков В. Н. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 6. С. 1310–1313.
9. Темиргалиев Н. Т. // Вестн. евразийского ун-та. 1997. № 3. С. 86–140.
10. Шерниязов К. Е. Восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с распределением начальных температур из классов. Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. Алматы, 1998.
11. Нурсултанов Е. Д., Тлеуханова Н. Т. // УМН. 2000. Т. 55. № 6. С. 153–154.
12. Нурсултанов Е. Д. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 235–248.

Карагандинский государственный университет
E-mail: nurs@kargu.krg.kz

Поступило
21.11.2002