Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Козлов, Т. В. Мадсен, Числа вращения Пуанкаре и средние Рисса и Вороного, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 314–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm592>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 09:02:07

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЧИСЛА ВРАЩЕНИЯ ПУАНКАРЕ И СРЕДНИЕ РИССА И ВОРОНОГО

В. В. Козлов, Т. Мадсен

1. Пусть T – гомеоморфизм окружности $\{x \bmod 2\pi\}$, сохраняющий ориентацию. Ясно, что $Tx = x + f(x)$, где f – непрерывная 2π -периодическая функция. Как доказал Пуанкаре [1],

$$f(T^n x) \rightarrow \lambda \quad (C) \quad (1)$$

при $n \rightarrow \infty$ для всех x . Символ C обозначает сходимость по Чезаро. Число $\mu = \lambda/(2\pi)$ называется *числом вращения* гомеоморфизма T .

Мы дополним это утверждение двумя замечаниями, которые будут использоваться ниже:

- 1) соотношение (1) справедливо и при $n \rightarrow -\infty$,
- 2) сходимость (1) равномерна по x .

Первое утверждение очевидно, а второе легко вытекает из доказательства теоремы Пуанкаре (см. [1], [2]).

2. Пусть $p_0 > 0$, $p_n \geq 0$ и $\sum p_n = \infty$. *Средними Рисса* последовательности $\{s_n\}_0^\infty$ называются отношения

$$t_n = \frac{p_0 s_0 + \dots + p_n s_n}{p_0 + \dots + p_n}.$$

Если $p_n = p_0$, то получаем средние Чезаро (средние арифметические). Последовательность p_n задает *метод суммирования Рисса*: если $t_n \rightarrow s$ при $n \rightarrow \infty$, то (по определению) $s_n \rightarrow s$ (R, p_n). Этот метод регулярен: если $s_n \rightarrow s$, то $t_n \rightarrow s$. Пусть $p_{n+1} \geq p_n$. Тогда метод Чезаро включает метод Рисса: из $s_n \rightarrow s$ (R, p_n) вытекает $s_n \rightarrow s$ (C). Если p_n возрастают экспоненциально с ростом n , то метод Рисса теряет силу и становится эквивалентным обычной сходимости.

Кроме сходимости по Риссу, мы будем использовать *сходимость по Вороному*. Пусть снова $q_0 > 0$, $q_n \geq 0$. Положим

$$u_n = \frac{q_n s_0 + \dots + q_n s_n}{q_0 + \dots + q_n}.$$

Если $u_n \rightarrow s$, то (по определению) $s_n \rightarrow s$ (W, q_n). Критерий регулярности W -метода:

$$\frac{q_n}{q_0 + \dots + q_n} \rightarrow 0.$$

Теория суммирования по Риссу и Вороному подробно изложена в [3].

3. Теорему Пуанкаре можно усилить, заменив метод Чезаро более слабым методом Рисса или Вороного.

Работа выполнена при поддержке гранта “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96146.

ТЕОРЕМА 1. Если $q_{n+1} \leq q_n$ и $\sum q_n = \infty$, то

$$f(T^n x) \rightarrow \lambda \quad (W, q_n).$$

ТЕОРЕМА 2. Если $p_{n+1} \geq p_n$ и $p_n / (\sum_0^n p_s) \rightarrow 0$, то

$$f(T^n x) \rightarrow \lambda \quad (R, p_n). \quad (2)$$

Эти два утверждения фактически эквивалентны. Докажем, например, теорему 2. Полагая $x = T^{-n}z$ (z зависит от n), имеем

$$\frac{p_0 f(x) + \dots + p_n f(T^n x)}{p_0 + \dots + p_n} = \frac{p_n f(z) + \dots + p_0 f(T^{-n} z)}{p_0 + \dots + p_n}.$$

В правой части этого равенства теперь фигурируют средние Вороного. Второе условие теоремы 2 – это критерий регулярности (W, p_n) -метода. Так как еще $p_{n+1} \geq p_n$, то по теореме Харди (теорема 23 из [3]), (W, p_n) -метод включает метод Чезаро. Следовательно, по теореме Пуанкаре (с учетом дополнений 1 и 2 из п. 1) средние Рисса (2) при всех x стремятся к λ при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось.

Теоремы 1 и 2 действительно усиливают теорему Пуанкаре, поскольку фигурирующие там методы Рисса и Вороного включены в метод Чезаро. Например, последовательность

$$p_n = \exp\left(\frac{n}{\ln^\alpha n}\right), \quad \alpha > 0,$$

удовлетворяет условиям теоремы 2, и (R, p_n) -метод существенно слабее метода Чезаро. Более того, при малых значениях α этот метод практически эквивалентен обычной сходимости.

4. В связи с теоремами 1 и 2 возникает интересная задача: описать все матричные методы суммирования S , для которых $f(T^n x) \rightarrow \lambda(S)$.

Для метода Рисса $S = (R, p_n)$ можно указать более слабое достаточное условие справедливости (2).

ТЕОРЕМА 3. Если $p_n / (\sum_0^n p_s) \rightarrow 0$ и

$$p_0(n+1) + |p_1 - p_0|n + |p_2 - p_1|(n-1) + \dots + |p_n - p_{n-1}| \leq H(p_0 + \dots + p_n) \quad (3)$$

для некоторого $H > 0$, то $f(T^n x) \rightarrow \lambda(R, p_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если метод (W, p_n) регулярен и выполнено условие (3), то (W, p_n) включает метод Чезаро (это следствие теоремы 19 из [3]). После этого замечания остается воспользоваться идеей доказательства теоремы 2.

Теорема 2 – следствие теоремы 3, поскольку из условия $p_{k+1} \geq p_k$ вытекает неравенство (3) с константой $H = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

(В. В. Козлов) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(Т. Мадсен) University of Aalborg (Denmark)
E-mail: kozlov@pran.ru; tatiana@cpc.auc.dk

Поступило
30.10.2002