Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Л. Оридорога, С. Хасси, Теоремы полноты для операторов типа Дирака с граничными условиями общего вида, зависящими от спектрального параметра, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 2, 316–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:13:27

ТЕОРЕМЫ ПОЛНОТЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ДИРАКА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Л. Л. Оридорога, С. Хасси

1. Введение. Хорошо известно (см. [1]), что система собственных и присоединенных функций (ССПФ) задачи Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \quad (1)$$

с разделяющимися краевыми условиями

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0 \quad (2)$$

полна в пространстве $L_2[0, 1]$ при произвольном комплекснозначном потенциале $q \in L_1[0, 1]$ и любых $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. Там же показана полнота СППФ в случае любых (а не только разделяющихся) невырожденных граничных условий.

Полнота СППФ дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} q_j(x)y = \lambda^n y, \quad (3)$$

произвольного порядка с разделяющимися (нерегулярными) краевыми условиями была анонсирована Келдышем в известной работе [2] и впервые доказана Шкаликовым в [3].

В [4] этот результат [1] был обобщен на системы дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями общего вида (не зависящими от спектрального параметра).

В статьях [5] и [6] исследована полнота СППФ уравнения (1) для случая нелинейных граничных условий, зависящих от спектрального параметра следующим образом:

$$\begin{cases} P_{11}(\lambda)y(0) + P_{12}(\lambda)y'(0) = 0, \\ P_{21}(\lambda)y^2(\frac{1}{2}) + P_{22}(\lambda)y(\frac{1}{2})y'(\frac{1}{2}) + P_{23}(\lambda)y'^2(\frac{1}{2}) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

и

$$\begin{aligned} &P_{i0}(\lambda)y^2(0) + P_{i1}(\lambda)y'^2(0) + P_{i2}(\lambda)y^2\left(\frac{1}{3}\right) + P_{i3}(\lambda)y'^2\left(\frac{1}{3}\right) + P_{i4}(\lambda)y(0)y'(0) \\ &+ P_{i5}(\lambda)y(0)y\left(\frac{1}{3}\right) + P_{i6}(\lambda)y(0)y'\left(\frac{1}{3}\right) + P_{i7}(\lambda)y'(0)y\left(\frac{1}{3}\right) \\ &+ P_{i8}(\lambda)y'(0)y'\left(\frac{1}{3}\right) + P_{i9}(\lambda)y\left(\frac{1}{3}\right)y'\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

В статьях [7] и [8] был получен аналогичный результат для систем типа Дирака с разделяющимися краевыми условиями (как линейными, так и нелинейными, аналогичными условиям (4)), зависящими от спектрального параметра.

В данной работе приводятся (с краткими доказательствами) теоремы полноты СППФ для систем двух интегродифференциальных уравнений первого порядка с линейными или квадратичными граничными условиями общего вида, зависящими от спектрального параметра. Именно, пусть

Работа первого автора поддержана Финской Академией, проект 52528.

$a < 0 < b$ и $B = \text{diag}(a^{-1}, b^{-1})$ – диагональная матрица размера 2×2 . Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1] \oplus L_2[0, 1]$ граничную задачу для системы интегродифференциальных уравнений вида

$$\frac{1}{i} B y' + Q(x) y + \int_0^x M(x, t) y(t) dt = \lambda y, \quad (6)$$

где

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ q_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x, t) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

При этом предполагается, что $q_j \in L_1[0, 1]$ и $M_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, где $\Omega = \{0 \leq t \leq x \leq 1\}$, $i, j = 1, 2$. Рассматриваются следующие типы граничных условий, зависящих от спектрального параметра:

(i) линейные условия общего вида

$$P_{i1}(\lambda) y_1(0) + P_{i2}(\lambda) y_2(0) + P_{i3}(\lambda) y_1(1) + P_{i4}(\lambda) y_2(1) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (7)$$

(ii) квадратичные условия общего вида

$$\begin{aligned} & P_{i0}(\lambda) y_1^2(0) + P_{i1}(\lambda) y_2^2(0) + P_{i2}(\lambda) y_1^2\left(\frac{1}{2}\right) + P_{i3}(\lambda) y_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + P_{i4}(\lambda) y_1(0) y_2(0) \\ & + P_{i5}(\lambda) y_1(0) y_1\left(\frac{1}{2}\right) + P_{i6}(\lambda) y_1(0) y_2\left(\frac{1}{2}\right) + P_{i7}(\lambda) y_2(0) y_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ & + P_{i8}(\lambda) y_2(0) y_2\left(\frac{1}{2}\right) + P_{i9}(\lambda) y_1\left(\frac{1}{2}\right) y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $P_{ij}(\lambda)$ – некоторые многочлены.

В следующей работе будут приведены результаты о полноте ССПФ задач (6), (7) и (6), (8) для систем типа Дирака произвольного порядка n .

2. Вспомогательные результаты. Для доказательства основных теорем данной работы используется следующая лемма, дающая оценки скорости роста функций

$$\vec{\varphi}_0(x; \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{01}(x; \lambda) \\ \varphi_{02}(x; \lambda) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{\psi}_0(x; \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{01}(x; \lambda) \\ \psi_{02}(x; \lambda) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

являющихся решениями задачи Коши для системы (6) с начальными условиями

$$\varphi_{01}(0; \lambda) = \psi_{02}(0; \lambda) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi_{02}(0; \lambda) = \psi_{01}(0; \lambda) = 0 \quad (10)$$

соответственно.

ЛЕММА 1. *Функции $\vec{\varphi}_0(x; \lambda)$ и $\vec{\psi}_0(x; \lambda)$ удовлетворяют оценкам*

$$\begin{aligned} \varphi_{01}(x; \lambda) &= \left(1 + O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right)\right) \exp(a \lambda i x), & \varphi_{02}(x; \lambda) &= O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right) \exp(a \lambda i x), \\ \psi_{01}(x; \lambda) &= O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right) \exp(a \lambda i x), & \psi_{02}(x; \lambda) &= O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right) \exp(a \lambda i x) \end{aligned} \quad (11)$$

при $\lambda \in \mathbb{C}^+$, и удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \varphi_{01}(x; \lambda) &= O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right) \exp(b \lambda i x), & \varphi_{02}(x; \lambda) &= O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right) \exp(b \lambda i x), \\ \psi_{01}(x; \lambda) &= O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right) \exp(b \lambda i x), & \psi_{02}(x; \lambda) &= \left(1 + O\left(\frac{1}{\text{Im } \lambda}\right)\right) \exp(b \lambda i x) \end{aligned} \quad (12)$$

при $\lambda \in \mathbb{C}^-$.

В доказательстве леммы используются построенные в [9] треугольные операторы преобразования, переводящие решения задачи Коши для простейшей системы типа (6), но с нулевой потенциальной матрицей Q , в решения задачи Коши для системы (6) с теми же начальными данными.

3. Теоремы полноты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, – многочлены такие, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ ранг матрицы

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & P_{13}(\lambda) & P_{14}(\lambda) \\ P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda) & P_{23}(\lambda) & P_{24}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (13)$$

равен 2 и, кроме того,

$$\deg J_{14} = \deg J_{32} \geq \max\{\deg J_{13}, \deg J_{42}, M\}, \quad (14)$$

где $M = \max\{\deg P_{ij} : i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ и

$$J_{ij} = \det \begin{pmatrix} P_{1i} & P_{1j} \\ P_{2i} & P_{2j} \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (15)$$

Тогда ССПФ задачи (6), (7) полна в пространстве $L^2[0, 1] \oplus L^2[0, 1]$.

Более того, пусть множество Φ , состоящее из $N := \deg J_{14} - M$ собственных и присоединенных функций, удовлетворяет следующему условию: если Φ содержит некоторую собственную или присоединенную функцию, соответствующую собственному значению λ_k , то вместе с ней оно содержит и все присоединенные функции более высокого порядка, соответствующие тому же собственному значению. Тогда ССПФ задачи (6), (7) без множества Φ также полна в пространстве $L_2[0, 1] \oplus L_2[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi(\lambda)$ – характеристическая функция задачи (6), (7):

$$\chi(\lambda) := \det \begin{pmatrix} Q_{11}(\lambda) & Q_{12}(\lambda) \\ Q_{21}(\lambda) & Q_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{11}(\lambda) &= P_{11}(\lambda) + P_{13}(\lambda)\varphi_{01}(1; \lambda) + P_{14}(\lambda)\varphi_{02}(1; \lambda), \\ Q_{12}(\lambda) &= P_{12}(\lambda) + P_{13}(\lambda)\psi_{01}(1; \lambda) + P_{14}(\lambda)\psi_{02}(1; \lambda), \\ Q_{21}(\lambda) &= P_{21}(\lambda) + P_{23}(\lambda)\varphi_{01}(1; \lambda) + P_{24}(\lambda)\varphi_{02}(1; \lambda), \\ Q_{22}(\lambda) &= P_{22}(\lambda) + P_{23}(\lambda)\psi_{01}(1; \lambda) + P_{24}(\lambda)\psi_{02}(1; \lambda). \end{aligned} \quad (17)$$

Число λ является собственным для оператора (6), (7) тогда и только тогда, когда $\chi(\lambda) = 0$. И, более того, если λ_0 – корень $\chi(\lambda)$ порядка p , то оператор (6), (7) имеет ровно p собственных и присоединенных функций, соответствующих собственному значению λ_0 .

Предположим, что существует ненулевая вектор-функция $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, ортогональная ССПФ задачи (6), (7) (кроме, быть может, функций из множества Φ). Рассмотрим функцию

$$\widetilde{F}_j(\lambda) := \langle \vec{\omega}_j(x; \lambda), \vec{f}(x) \rangle = \int_0^1 (\omega_{j1}(x; \lambda)\overline{f_1(x)} + \omega_{j2}(x; \lambda)\overline{f_2(x)}) dx, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_j(x; \lambda) &= (P_{j2}(\lambda) + P_{j3}(\lambda)\psi_{01}(1; \lambda) + P_{j4}(\lambda)\psi_{02}(1; \lambda))\vec{\varphi}_0(x; \lambda) \\ &\quad - (P_{j1}(\lambda) + P_{j3}(\lambda)\varphi_{01}(1; \lambda) + P_{j4}(\lambda)\varphi_{02}(1; \lambda))\vec{\psi}_0(x; \lambda), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что $\widetilde{F}_j(\lambda)$ – целая функция. Если λ_s – собственное значение оператора (6), (7) порядка p и множество Φ содержит k (возможно, $k = 0$) собственных и присоединенных функций, соответствующих собственному значению λ_0 , то λ_s является корнем функций $\widetilde{F}_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, порядка не ниже $p - k$.

Пусть Λ – множество таких собственных чисел задачи (6), (7), что соответствующие им собственные или присоединенные функции входят в множество Φ . Для каждого $\lambda_s \in \Lambda$ обозначим

через p_s количество собственных и присоединенных функций, соответствующих λ_s , которые содержатся в множестве Φ . Пусть

$$\Pi(\lambda) = \prod_{\lambda_s \in \Lambda} (\lambda - \lambda_s)^{p_s}. \quad (20)$$

Пусть λ_k – собственное значение оператора (6), (7) кратности p . Тогда λ_k является корнем кратности не ниже p произведения $\Pi(\lambda)\tilde{F}_j(\lambda)$. Следовательно, функция

$$F_j(\lambda) = \frac{\Pi(\lambda)\tilde{F}_j(\lambda)}{\chi(\lambda)} \quad (21)$$

целая.

Оценим ее. Перепишем для этого $\chi(\lambda)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= J_{12} + J_{13}\psi_{01}(1; \lambda) + J_{14}\psi_{02}(1; \lambda) + J_{32}\varphi_{01}(1; \lambda) + J_{42}\varphi_{02}(1; \lambda) \\ &\quad + J_{34} \det \begin{pmatrix} \varphi_{01}(1; \lambda) & \psi_{01}(1; \lambda) \\ \varphi_{02}(1; \lambda) & \psi_{02}(1; \lambda) \end{pmatrix} \\ &= J_{12} + J_{13}\psi_{01}(1; \lambda) + J_{14}\psi_{02}(1; \lambda) + J_{32}\varphi_{01}(1; \lambda) + J_{42}\varphi_{02}(1; \lambda) \\ &\quad + J_{34} \left(1 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Im} \lambda}\right) \right) \exp((a+b)\lambda i). \end{aligned} \quad (22)$$

Из оценок (11), (12) и условия (14) получаем следующие оценки $\chi(\lambda)$:

$$\chi(\lambda) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Im} \lambda}\right) \right) J_{32} \exp(a\lambda i), \quad \lambda \in \mathbb{C}^+, \quad (23)$$

$$\chi(\lambda) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Im} \lambda}\right) \right) J_{14} \exp(b\lambda i), \quad \lambda \in \mathbb{C}^-. \quad (24)$$

Из определения функций $\vec{\omega}_j(x; \lambda)$ получаем

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_j(x; \lambda) &= -P_{j1}(\lambda)\psi_0(x; \lambda) + P_{j2}(\lambda)\varphi_0(x; \lambda) \\ &\quad + \left(1 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Im} \lambda}\right) \right) \exp((a+b)\lambda i) (-P_{j3}(\lambda)\psi_1(x; \lambda) + P_{j4}(\lambda)\varphi_1(x; \lambda)). \end{aligned} \quad (25)$$

При $\lambda \in \mathbb{C}^+$ из (25) и оценок (11) получаем

$$\begin{aligned} \omega_{jk}(x; \lambda) &= (O(P_{j1}(\lambda)) + O(P_{j2}(\lambda))) \exp(a\lambda i) \\ &\quad + (O(P_{j3}(\lambda)) + O(P_{j4}(\lambda))) \exp(a\lambda i) \exp(b\lambda i x). \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку при таких λ

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_k(x) \exp(a\lambda i x)| dx &= O(\exp(a\lambda i) |\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2}) \quad \text{и} \\ \int_0^1 |f_k(x) \exp(b\lambda i x)| dx &= O(|\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2}), \end{aligned}$$

то существует константа $c_1 > 0$ такая, что при $\operatorname{Im} \lambda > c_1$

$$\tilde{F}_j(\lambda) = O(\max |P_{jk}(\lambda)| \exp(a\lambda i) |\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2}) = O(\lambda^M \exp(a\lambda i) |\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2}). \quad (27)$$

Аналогично, существует константа $c_2 < 0$ такая, что при $\operatorname{Im} \lambda < c_2$

$$\tilde{F}_j(\lambda) = O(\lambda^M \exp(b\lambda i) |\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2}). \quad (28)$$

Окончательно, из (23), (24), (27) и (28) получаем следующую оценку:

$$F_j(\lambda) = O(|\operatorname{Im} \lambda|^{-1/2}), \quad |\operatorname{Im} \lambda| > c. \quad (29)$$

Поэтому, по теореме Фрагмена–Линделёфа для полосы, $F_i(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, и $\tilde{F}_i(\lambda) \equiv 0$, т.е. $\tilde{f}(x)$ ортогональна обоим функциям $\vec{\omega}_j(x; \lambda)$ при всех λ , а значит и всем решениям уравнения (6). Поэтому $\tilde{f}(x) \equiv 0$, т.е. ССПФ задачи (6), (7) без множества Φ полна в пространстве $L^2[0, 1] \oplus L^2[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть P_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, 9$, — многочлены такие, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P_{10}(\lambda) & P_{11}(\lambda) & \dots & P_{19}(\lambda) \\ P_{20}(\lambda) & P_{21}(\lambda) & \dots & P_{29}(\lambda) \end{pmatrix} = 2, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (30)$$

и, кроме того,

$$\deg J_{03} = \deg J_{12} = M,$$

где

$$J_{ij} = \det \begin{pmatrix} P_{1i} & P_{1j} \\ P_{2i} & P_{2j} \end{pmatrix}, \quad i, j = 0, 1, \dots, 9,$$

и $M = \max\{\deg P_{ij} : i \in \{1, 2\}; j \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$. Тогда ССПФ задачи (6), (8) полна в пространстве $L^2[0, 1] \oplus L^2[0, 1]$.

Более того, пусть множество Φ , состоящее из M собственных и присоединенных функций, удовлетворяет следующему условию: если Φ содержит некоторую собственную или присоединенную функцию, соответствующую собственному значению λ_k , то вместе с ней оно содержит и все присоединенные функции более высокого порядка, соответствующие тому же собственному значению. Тогда ССПФ задачи (6), (8) без множества Φ также полна в пространстве $L_2[0, 1] \oplus L_2[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
2. Келдыш М. В. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.
3. Шкаликов А. А. // Функцион. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 4. С. 69–80.
4. Маламуд М. М., Оридорога Л. Л. // Функцион. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 3. С. 88–90.
5. Тарапова Е. И. // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1979. Т. 31. С. 157–160.
6. Тарапова Е. И. // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1979. Т. 33. С. 82–87.
7. Oridoroga L. L. // Доповіді НАН України. 2001. № 3. Р. 34–39.
8. Oridoroga L. L. // Methods of Functional Analysis and Topology. 2001. V. 7. № 1. Р. 82–87.
9. Маламуд М. М. // Тр. ММО. 1999. Т. 60. С. 199–258.

(Л. Л. Оридорога) Донецкий национальный университет
(С. Хасси) Университет Ваасы, Финляндия
E-mail: oridoroga@skif.net, Sha@UWasa.Fi

Поступило
12.09.2001