Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Бондаренко, Логарифмический градиент ядра теплопроводности на римановом многообразии, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 471–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:12:07

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТ ЯДРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

В. Г. Бондаренко

Пусть M – полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны, $\dim M = n$, с метрикой ρ и объемом σ ; $p(t, x, y)$ – ядро теплопроводности, т.е. фундаментальное решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u, \quad x, y \in M, \quad t \in (0; T], \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа–Бельтрами. В данной работе для логарифмического градиента этого ядра

$$U(t, x, y) = \text{grad}_x \ln p(t, x, y) \in T_x M$$

получено представление в виде суммы двух векторных полей и для одного из слагаемых установлена оценка.

1. Введение. Через $R(x)$ обозначим тензор кривизны многообразия; если $\{e_k\}$ – ортобазис в $T_x M$, то

$$\text{Ric}(x)(U, V) = \sum_{k=1}^n (R(x)(U, e_k)V, e_k), \quad r(x) = \text{tr Ric}(x)$$

называются соответственно *тензором Риччи* и *скалярной кривизной* многообразия (отличные знаком от общепринятых). Пусть γ – геодезическая, $\gamma(0) = y$, $\gamma(\rho(x, y)) = x$. *Поле Якоби* вдоль γ называется решение $Z(s)$ уравнения Якоби

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)}^2 Z(s) = R(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), Z(s)) \dot{\gamma}(s).$$

Пусть тензор кривизны удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\sum_k |R(x)(U, e_k)V, \varphi_k| < c \sqrt{\text{Ric}(x)(U, U) \text{Ric}(x)(V, V)}$, где $\{e_k\}$ и $\{\varphi_k\}$ – произвольные ортобазисы в $T_x M$, а константа c не зависит от x ;
- 2) вдоль любой геодезической скалярная кривизна убывает достаточно быстро, т.е.

$$\int_0^\infty sr(\gamma(s)) ds < c,$$

где c не зависит от γ ;

- 3) ковариантные производные тензора кривизны удовлетворяют оценкам

$$\|(\nabla_{X(s)} R)(\gamma(s))(\Upsilon(s), \dot{\gamma}(s))Z(s)\| \leq f_1(\gamma(s)) \|X(s)\| \cdot \|\Upsilon(s)\| \cdot \|Z(s)\|,$$

$$\|\nabla_{U(s)} \nabla_{X(s)} R(\gamma(s))(\Upsilon(s), \dot{\gamma}(s))Z(s)\| \leq f_2(\gamma(s)) \|X(s)\| \cdot \|\Upsilon(s)\| \cdot \|Z(s)\| \cdot \|U(s)\|,$$

где функции f_1 и f_2 таковы, что вдоль любой геодезической $\gamma \int_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s)) ds < c$, c не зависит от γ .

Как показано в [1] и [2], при выполнении этих условий имеют место следующие результаты. Определим вдоль γ оператор D :

$$D(\gamma(s))U = \nabla_U \rho(y, \gamma(s))\dot{\gamma}(s), \quad \gamma(0) = y, \quad U \in T_{\gamma(s)}M,$$

и функцию

$$a(x, y) = \text{tr}(D(x) - I),$$

Тогда $D(x) \geq I$, а для функции $a(x, y)$ справедливы неравенства

$$0 \leq a(x, y) \leq \int_0^{\rho(x, y)} s \text{Ric}(\gamma(s))(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds, \quad \|\text{grad}_x a(x, y)\| < c, \quad |\Delta_x a(x, y)| < c.$$

Для функции

$$\varphi(x, y) = \int_0^{\rho(x, y)} \frac{a(\gamma(s), y)}{s} ds$$

также ограничены $\|\text{grad}_x \varphi(x, y)\|$ и $|\Delta_x \varphi(x, y)|$.

Положим

$$q(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2(x, y)}{2t}}, \quad m(t, x, y) = q(t, x, y) e^{-\frac{\varphi(x, y)}{2} - kt},$$

где k – некоторая положительная константа.

В работе [3] фундаментальное решение $p(t, x, y)$ построено методом параметрикса:

$$p(t, x, y) = m(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_M m(t - \tau, x, z) r(\tau, z, y) \sigma(dz), \quad (2)$$

где функция $r(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению Вольтерра. При ее оценивании в интеграле

$$\int_M f(z) q(\tau, z, y) q(t - \tau, x, z) \sigma(dz)$$

используется замена

$$U = \sqrt{\frac{t}{\tau(t - \tau)}} \rho(x, z) e(x, z) - \sqrt{\frac{t - \tau}{t\tau}} \rho(x, y) e(x, y), \quad (3)$$

$$z(U) = \text{Exp}_x \left(\sqrt{\frac{\tau(t - \tau)}{t}} U + \frac{t - \tau}{t} \rho(x, y) e(x, y) \right)$$

(где $e(x, y)$ – единичный вектор, касательный в точке x к геодезической, соединяющей x и y , и направленный к y), которая приводит упомянутый интеграл к выражению

$$\int_{T_x M} f(z(U)) J(t, \tau, x, y, U) \mu_x(dU) q(t, x, y),$$

где μ_x – каноническая гауссова мера на $T_x M$, а якобиан J ограничен. В результате для r доказана оценка: $|r(t, x, y)| < c q(t, x, y)$, $x, y \in M$, $t \in (0; T]$.

2. Результаты. Рассмотрим разность

$$W(t, x, y) = \text{grad}_x \ln p(t, x, y) - \text{grad}_x \ln q(t, x, y) \equiv U(t, x, y) - \frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y).$$

Дифференцируя уравнение (1) вдоль произвольного векторного поля $H(x)$, можно получить систему уравнений для U и W : подставляя во вторую систему $H = W$, для функции $\alpha(t, x, y) = \|W(t, x, y)\|^2$ получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{1}{2} \Delta \alpha + (\text{grad } \alpha, U) + \alpha \left(\text{Ric}(x)(E, E) - \frac{2}{t} (D(x)E, E) \right) \\ &\quad - \frac{1}{t} (\text{grad } a(x, y), W) - \sum_k \|\nabla_{e_k} w\|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $E(t, x, y) = W/\|W\|$, а оператор $D(x)$ определен выше.

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. При выполнении условий (1)–(3) для $x, y \in M, t \in [0; T]$ справедлива оценка

$$\|W(t, x, y)\| < c,$$

где константа c зависит только от T .

ЛЕММА 1. Начальное условие для векторного поля $W(t, x, y)$ определяется равенством

$$W(0, x, y) = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \varphi(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцирование по x равенства (2) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \ln p(t, x, y) = & \frac{1}{p(t, x, y)} \left(m(t, x, y) \left(\frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y) - \frac{\operatorname{grad} \varphi(x, y)}{2} \right) \right. \\ & \left. + \int_0^t d\tau \int_M \left(\frac{\rho(x, z)}{t-\tau} e(x, z) - \frac{\operatorname{grad} \varphi(x, z)}{2} \right) m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y) \sigma(dz) \right). \end{aligned}$$

Вычитая из обеих частей равенства

$$\operatorname{grad} \ln q(t, x, y) = \frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y)$$

и подставляя вместо $p(t, x, y)$ правую часть (2), приходим к равенству

$$\begin{aligned} W(t, x, y) = & \frac{1}{1 + \frac{1}{m(t, x, y)} \int_0^t d\tau \int_M m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y) \sigma(dz)} \\ & \times \left(-\frac{1}{2} \operatorname{grad} \varphi(x, y) + \frac{1}{m(t, x, y)} \int_0^t d\tau \int_M \left(\frac{\rho(x, z)}{t-\tau} e(x, z) - \frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y) \right) \right. \\ & \times m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y) \sigma(dz) - \frac{1}{m(t, x, y)} \int_0^t d\tau \int_M \operatorname{grad} \varphi(x, y) \\ & \left. \times m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y) \sigma(dz) \right). \end{aligned}$$

В силу упомянутой выше оценки для $r(t, x, y)$ для ограниченной функции f справедливо соотношение

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\int_0^t d\tau \int_M f(z) m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y) \sigma(dz)}{m(t, x, y)} = 0,$$

т.е.

$$\begin{aligned} W(0, x, y) = & -\frac{1}{2} \operatorname{grad} \varphi(x, y) + \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{m(t, x, y)} \int_0^t d\tau \int_M \left(\frac{\rho(x, z)}{t-\tau} e(x, z) \right. \\ & \left. - \frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y) \right) m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y) \sigma(dz). \end{aligned}$$

Оценим интеграл в правой части, воспользовавшись заменой (3). Пусть $V \in T_x M$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_M \left(\frac{\rho(x, z)}{t-\tau} e(x, z) - \frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y), V \right) m(t-\tau, x, z) q(\tau, z, y) \sigma(dz) \right| \\ & < \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{T_x M} \sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}} |(U, V)| \exp \left\{ -\frac{\varphi(x, z(U))}{2} - k(t-\tau) \right\} \mu_x(dU) q(t, x, y) \\ & < \frac{c}{\sqrt{t}} \sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}} \|V\| q(t, x, y). \end{aligned}$$

Интегрируя полученную оценку по $d\tau$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{t}} \|V\| q(t, x, y) \int_0^t \sqrt{\frac{\tau}{t-\tau}} d\tau = \frac{c\pi\sqrt{t}}{2} \|V\| q(t, x, y),$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Оценивая правую часть уравнения (4) с помощью неравенств

$$\sqrt{\alpha} < \frac{\varepsilon\alpha}{2} + \frac{1}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad \|\operatorname{grad} a(x, y)\| \leq C_1, \quad \operatorname{Ric}(x)(E, E) \leq C_2, \quad D(x) \geq I$$

приходим к неравенству

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} < \frac{1}{2}\Delta\alpha + (\operatorname{grad} \alpha, U) + \alpha \left(C_2 - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon C_1}{2t} \right) + \frac{C_1}{2\varepsilon t},$$

откуда следует неравенство

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} < \frac{1}{2}\Delta\beta + \beta \left(C_2 - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon C_1}{2t} \right) + \frac{C_1}{2\varepsilon t} p$$

для функции

$$\beta(t, x, y) = \alpha(t, x, y)p(t, x, y).$$

Покажем, что для достаточно большого числа k функция $kp(t, x, y)$ удовлетворяет на некотором интервале $(0; t_0]$ обратному неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t}(kp) > \frac{1}{2}\Delta(kp) + kp \left(C_2 - \frac{2}{t} + \frac{\varepsilon C_1}{2t} \right) + p \frac{C_1}{2\varepsilon t}.$$

Последнее является следствием неравенств

$$k > \max \left(\frac{1}{4} \|\operatorname{grad} \varphi(x, y)\|^2, \frac{C_1^2}{4} \right), \quad \frac{2 - \sqrt{4 - \frac{C_1^2}{k}}}{C_1} < \varepsilon < \frac{2 + \sqrt{4 - \frac{C_1^2}{k}}}{C_1},$$

$$t_0 < \frac{2 - \varepsilon C_1/2 - C_1/2\varepsilon k}{C_2}.$$

В силу теорем сравнения [4, с. 72–74]

$$\alpha(t, x, y) < k, \quad x, y \in M, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

На интервале $(t_0; T]$ $\beta(t, x, y)$ мажорируется функцией

$$\lambda(t, x, y) = \left(e^{A(t-t_0)} \left(\frac{B}{A} + k \right) - \frac{B}{A} \right) p(t, x, y), \quad \lambda(t_0, x, y) = kp(t_0, x, y),$$

удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\lambda + \lambda A + Bp,$$

где положительные числа $A > C_2 - 2/t_0 + \varepsilon C_2/t_0$, $B > C_1/2\varepsilon t_0$, откуда и следует утверждение теоремы для $t \leq T$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bondarenko V. // *Comp. Rendus A. S.* 1997. V. 324. № 10. P. 1099–1103. 2. Бондаренко В. Г. // *Укр. матем. ж.* 1998. Т. 50. № 8. С. 1129–1136. 3. Бондаренко В. Г. // *Укр. матем. ж.* 1999. Т. 51. № 11. С. 1143–1148. 4. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа*. М.: Мир, 1968.

Национальный технический университет Украины
Киевский политехнический институт
E-mail: victorb@mmsa.ntu-kpi.kiev.ua

Поступило
04.06.2002