Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Гришко, Об асимметрично разложимых группах, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 475–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:59:16

Подмножество A группы G называется *симметричным* относительно элемента $g \in G$, если $A = gA^{-1}g$. Группа называется *асимметрично разложимой*, если ее можно разбить на два подмножества, не содержащие бесконечных симметричных подмножеств. Абелева группа асимметрично разложима тогда и только тогда, когда она почти циклическая либо счетная периодическая с конечным числом элементов порядка 2 [1]. Группа называется *почти циклической*, если она содержит циклическую подгруппу конечного индекса.

В неабелевом случае исследование группы на предмет асимметричной разложимости значительно сложнее. Так, было неизвестно, являются ли асимметрично разложимыми свободная группа с двумя образующими, а также любая бесконечная конечно порожденная периодическая группа. О второй группе было неизвестно даже, найдется ли сколь угодно большое конечное одноцветное симметричное подмножество для произвольного ее 2-раскрашивания. Это частный случай ($r = 2$) следующих двух вопросов.

(1) Верно ли, что для любого r -раскрашивания свободной группы с двумя образующими найдется бесконечное одноцветное симметричное подмножество (Р. И. Григорчук, [2, problem 1.2])?

(2) Верно ли, что для любого r -раскрашивания произвольной бесконечной группы найдется сколь угодно большое конечное одноцветное симметричное подмножество (И. В. Протасов, [2, problem 1.6])?

Второй вопрос редуцируется к бесконечным конечно порожденным группам конечного периода следующим образом. Если порядки элементов группы неограничены в совокупности, то применяем теорему ван дер Вардена: на множестве натуральных чисел существует функция $n(r, l)$ такая, что для любого r -раскрашивания множества первых $n(r, l)$ натуральных чисел найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины l . Если группа имеет конечный период и локально конечна, то выделяем в ней бесконечную абелеву подгруппу (теорема Каргаполова–Холла–Кулатилаки) и применяем теорему Грэхема–Либэ–Росчайльда: для любого r -раскрашивания бесконечной абелевой группы конечного периода найдется сколь угодно большой одноцветный смежный класс по конечной подгруппе. Если же группа имеет конечный период и отлична от локально конечной, то она содержит бесконечную конечно порожденную группу конечного периода.

Мы докажем, что если коммутант группы содержит конечно порожденную подгруппу, отличную от почти циклической, то она не является асимметрично разложимой. Из этого следует, что асимметрично разложимыми не являются свободная группа с двумя образующими и бесконечная конечно порожденная периодическая группа.

В нашем доказательстве важную роль играет тот нетривиальный факт, что почти циклической является любая группа линейного роста. Действительно, каждая группа полиномиального роста содержит нильпотентную подгруппу G конечного индекса [2] и степень d полинома вычисляется при помощи нижнего центрального ряда

$$G = G_1 > G_2 > \dots, \quad G_{k+1} = [G, G_k],$$

по формуле

$$d = \sum_{k \geq 1} k \cdot r_0(G_k/G_{k+1}),$$

где $r_0(A)$ – ранг без кручения абелевой группы A [3]. Если $d = 1$, то ранг первой секции ряда равен 1, а ранги остальных секций равны 0. Так как G конечно порождена и нильпотентна, то конечно порождены и все члены ряда, а значит, все секции – конечно порожденные абелевы группы. Таким образом, первая секция почти циклическая, а остальные конечные, а следовательно, и вся группа G почти циклическая.

ТЕОРЕМА. Пусть группа G содержит конечное подмножество $X = X^{-1} \ni 1$ такое, что подгруппа $[X, X] = \langle [x, y]: x, y \in X \rangle$ отлична от почти циклической. Тогда для любого 2-раскрашивания G найдется бесконечное одноцветное подмножество, симметричное относительно некоторого элемента из X^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда найдется конечное $F_0 \subset G$ такое, что для любых $g \in G \setminus F_0$ и $x \in X^2$ элементы g и $zg^{-1}x$ разных цветов. Но тогда, поскольку цветов лишь два, найдется конечное $F \supseteq F_0$ такое, что для любых $g \in G \setminus F$ и $z \in X^2$ элементы g и $zgz = (z^{-1}g^{-1}z^{-1})^{-1}$ одного цвета. Переходы вида $g \rightarrow zgz$ будем называть элементарными. Отметим, что для любых конечного $K \subset G$ и натурального s существует лишь конечное число элементов G , из которых можно добраться до K за $\leq s$ элементарных переходов.

Идея доказательства такова. Мы выберем некоторый элемент $a \in H \setminus F$ и перейдем с помощью элементарных переходов от a к a^{-1} , минуя F , что и будет противоречием. Для того, чтобы минимизировать F , мы выберем некоторый элемент $b \in H$ и перейдем вначале от a к ab , затем от ab к ba^{-1} , а затем от ba^{-1} к a^{-1} . Более детально, обозначим

$$U = \{[x, y]: x, y \in X\}, \quad H = \langle U \rangle = [X, X].$$

Пока еще не выбран элемент a запишем в виде $a = z_1 \dots z_m$, $z_i \in X$, а пока еще не выбранный элемент b – в виде $b = u_1 \dots u_n$, $u_j \in U$, $u_j = [x_j, y_j]$, $x_j, y_j \in X$. От a к ab перейдем следующим образом:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow x_1 a x_1 \rightarrow y_1 x_1 a x_1 y_1 \rightarrow a x_1 y_1 (y_1 x_1)^{-1} \\ &= a x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} = a[x_1, y_1] = a u_1 \rightarrow \dots \rightarrow a u_1 \dots u_n = ab. \end{aligned}$$

Для того, чтобы перейти от ba^{-1} к a^{-1} , вначале перейдем от $ab = z_1 \dots z_m b$ к $z_m \dots z_1 b$. Поясним лишь, как перейти от $z_1 \dots z_{i-1} z_i z_{i+1} z_{i+2} \dots z_m b$ к $z_1 \dots z_{i-1} z_{i+1} z_i z_{i+2} \dots z_m b$:

$$\begin{aligned} z_1 \dots z_m b &\rightarrow z_2 \dots z_m b z_1^{-1} \rightarrow \dots \rightarrow z_{i+2} \dots z_m b z_1^{-1} \dots z_{i+1}^{-1} \\ &\rightarrow z_{i+1} z_i z_{i+2} \dots z_m b z_1^{-1} \dots z_{i-1}^{-1} \\ &\rightarrow z_{i-1} z_{i+1} z_i z_{i+2} \dots z_m b z_1^{-1} z_{i-2}^{-1} \rightarrow \dots \rightarrow z_1 \dots z_{i-1} z_{i+1} z_i z_{i+2} \dots z_m b, \end{aligned}$$

а затем перейдем от $z_m \dots z_1 b$ к $b z_m^{-1} \dots z_1^{-1} = ba^{-1}$. Как видим, в переходе от ab к ba^{-1} число элементарных переходов зависит лишь от m . И наконец, перейдем от ba^{-1} к a^{-1} . Нам осталось выбрать элементы a, b .

Для каждого $g \in H$ через $l(g)$ обозначим наименьшую из длин разложений g через элементы из U :

$$l(g) = \min\{n < \omega: g \in U^n\}.$$

Отметим, что $l(g^{-1}) = l(g)$, $l(gh) \leq l(g) + l(h)$, а значит, $l(gh) \geq |l(g) - l(h)|$.

Выберем последовательность $\langle u_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ в U следующей леммой.

ЛЕММА 1. Существует последовательность $\langle U_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ в U такая, что $l(u_1 \dots u_n) = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого неединичного $g \in H$, $l(g) = n$, зафиксируем минимальное разложение $g = u_1(g) \dots u_n(g)$. Выберем последовательность $\langle g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ в H такую, что $l(g_n) \geq n$ и $u_1(g_n) = u_1$ для некоторого $u_1 \in U$. Затем выберем в $\langle g_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ подпоследовательность $\langle h_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что $u_2(h_n) = u_2$ для некоторого $u_2 \in U$, и т. д. Лемма доказана.

Именно из последовательности произведений $\langle u_1 \dots u_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ мы будем выбирать элемент b . Для этого нужно лишь выбрать номер n , но это потом. А пока что выберем натуральное k так, чтобы для любых $g \in H$, $l(g) > k$, $x, y \in X$ переход

$$g \rightarrow xgx \rightarrow yxgy \rightarrow gxy(yx)^{-1} = g[x, y]$$

миновал F .

Элемент a выберем следующей леммой.

ЛЕММА 2. *Существует элемент $a \in H$, $l(a) > k$, такой, что $l(au_1 \dots u_n) > k$ и $l(u_1 \dots u_n a^{-1}) > k$ для всех n .*

Первое условие означает, что последовательное навешивание справа на элемент a коммутаторов $u_1, u_2, \dots$ из нашей последовательности оставляет длину элемента $> k$, а значит, переход от a к ab будет миновать F . Второе условие соответствует свертыванию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда для любого $a \in H$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что либо $au_1 \dots u_n \in \Gamma(k)$, либо $u_1 \dots u_n a^{-1} \in \Gamma(k)$, где $\Gamma(k) = \{g \in H : l(g) \leq k\}$. Значит, для любого $a \in H$ либо $a \in (u_1 \dots u_n \Gamma(k))^{-1}$, либо $a \in \Gamma(k)u_1 \dots u_n$. А значит,

$$H = \{(u_1 \dots u_n g)^{-1}, gu_1 \dots u_n : n \in \mathbb{N}, g \in \Gamma(k)\}.$$

Из этого следует, что

$$\Gamma(n) \subseteq \{(u_1 \dots u_i g)^{-1}, gu_1 \dots u_i : i \leq n + k, g \in \Gamma(k)\},$$

Положим $\gamma(n) = |\Gamma(n)|$. Очевидно, γ – функция роста H и

$$\gamma(n) \leq 2\gamma(k)(n + k).$$

Таким образом, рост H линейный. Но тогда H почти циклическая, – противоречие. Лемма доказана.

Номер n выберем так, чтобы переход от $au_1 \dots u_n = ab$ к ba^{-1} миновал F . В результате общий переход от a к a^{-1} также будет миновать F . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Свободная группа с двумя образующими и любая бесконечная конечно порожденная периодическая группа не являются асимметрично разложимыми.*

Отметим, что для свободной группы с двумя образующими доказать то, что она не является асимметрично разложимой, можно и попроще, не привлекая соображений, связанных с ростом группы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Протасов И. В. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 3. С. 468–471. 2. Banakh T., Protasov I. // Вопросы алгебры. 2000. 3. Gromov M. // Publ. Math. IHÉS. 1981. V. 53. P. 53–73. 4. Bass H. // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 25. № 4. P. 603–614.

Киевский университет им. Тараса Шевченко
E-mail: grishko@i.com.ua

Поступило
14.12.2000