Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Т. Фоменко, Классификация двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в четырехмерном пространстве постоянной кривизны, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 744–756

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm60>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:54:12

УДК 513.74+514.75

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С НУЛЕВЫМ НОРМАЛЬНЫМ КРУЧЕНИЕМ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В. Т. Фоменко

Вводится понятие нормального кручения поверхности в точке по заданному направлению в римановом пространстве. Дается полная классификация поверхностей в четырехмерном пространстве постоянной кривизны, для которых нормальное кручение тождественно равно нулю.

Библиография: 9 названий.

Впервые понятие нормального кручения в точке по заданному направлению для двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 было введено В. Фесслером в 1959 г. в работе [1]. Затем в 1975 г. С.Б. Кадомцевым [2] при некоторых дополнительных условиях было дано описание двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 . Эти исследования для поверхностей евклидова пространства были продолжены В.Т. Фоменко [3], [4], Л.А. Масальцевым [5], Б. Ченом и Ш. Ли [6].

В данной работе вводится аналогичное понятие нормального кручения в точке по не асимптотическому направлению двумерной поверхности в римановом пространстве. Для четырехмерного риманова пространства постоянной кривизны R^4 дается полное описание двумерных поверхностей, не содержащих асимптотических направлений, с нулевым нормальным кручением для любой точки и по любому направлению поверхности.

1. Пусть R^4 – риманово пространство постоянной кривизны R_0 , заданное метрической формой $ds^2 = a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$, $a_{\alpha\beta} \in C^k$, $k \geq 4$. Рассмотрим в R^4 двумерную поверхность F^2 , заданную в окрестности каждой своей точки уравнениями

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D, \quad \alpha = 1, \dots, 4,$$

где D – некоторая область параметрической плоскости (x^1, x^2) . Тензоры $t_i^\alpha = \partial y^\alpha / \partial x^i \equiv \partial_i y^\alpha$, $i = 1, 2$, определяют касательную плоскость $T_x F^2$ поверхности F^2 в точке x . Метрика пространства R^4 индуцирует на F^2 метрику, задаваемую формулой $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, где $g_{ij} = a_{\alpha\beta} t_i^\alpha t_j^\beta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-00814а.

Рассмотрим регулярное нормальное оснащение поверхности F^2 , задав его тензорными полями единичных взаимно-ортогональных векторов n_σ^α , $\sigma = 3, 4$. Далее первые буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma \dots$ будут пробегать значения от 1 до 4; латинские индексы i, j, k – значения 1, 2; греческие индексы σ, τ, λ – значения 3, 4. Будем также отождествлять одновалентные тензоры $t_i^\alpha, n_\sigma^\alpha, \dots$ в точке x в R^4 с векторами $t_i^\alpha, n_\sigma^\alpha, \dots$, соприкасающимися к R^4 в точке x евклидова пространства E^4 . Все утверждения работы носят локальный характер.

Введем в рассмотрение метрический тензор $g_{\sigma\tau}$ нормальной плоскости $N_x F^2$ поверхности F^2 в точке x , положив

$$g_{\sigma\tau} = a_{\alpha\beta} n_\sigma^\alpha n_\tau^\beta.$$

Обозначим через $\bar{\nabla} = \overset{*}{\nabla} \oplus \nabla^\perp$ ковариантное дифференцирование в смысле Ван дер Вардена–Бортолотти, где $\overset{*}{\nabla}$ – смешанное ковариантное дифференцирование в R^4 вдоль F^2 (см., например, [7]), $\nabla^\perp$ – ковариантное дифференцирование в нормальной связности F^2 .

Пусть $l_g: x^i = x^i(s)$ – геодезическая на поверхности F^2 в R^4 , отнесенная к натуральному параметру. Пусть в каждой точке кривой l_g однозначно определен единичный вектор первой нормали m^α в R^4 . Рассмотрим ковариантную производную вектора m^α вдоль кривой $l_g: \bar{D}m^\alpha/ds$.

Пусть χ_n^α – составляющая вектора $\bar{D}m^\alpha/ds$ в нормальной плоскости $N_x F^2$ поверхности F^2 в точке x . Длину вектора χ_n^α будем называть *нормальным кручением* поверхности F^2 в точке x по направлению $t^i = dx^i/ds$ и обозначать через $\chi_n(x, t^i)$. Для поверхностей F^2 в E^4 величина $\chi_n(x, t^i)$ совпадает с кручением нормального сечения поверхности F^2 в точке x по направлению t^i (см. [3]).

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть поверхность F^2 класса C^k , $k \geq 3$, в пространстве R^4 постоянной кривизны R_0 имеет плоскую нормальную связность и не имеет асимптотических направлений. Тогда нормальное кручение поверхности F^2 тождественно равно нулю ($\chi_n(x, t^i) \equiv 0 \quad \forall x \in F^2, \forall (t^1, t^2) \in T_x F^2$) тогда и только тогда, когда поверхность F^2 удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) F^2 лежит на вполне геодезической гиперповерхности в R^4 ;
- 2) F^2 лежит на гиперповерхности постоянной кривизны $R_0 + c_1^2$, $c_1 > 0$, имеет постоянную нулевую внутреннюю кривизну $K_i \equiv 0$ и ненулевой вектор средней кривизны постоянной длины H_0 , $H_0^2 + R_0 > 0$; эллипс нормальной кривизны в каждой точке поверхности вырождается в отрезок прямой постоянной длины $2\sqrt{H_0^2 + R_0}$ и составляет с вектором средней кривизны постоянный ненулевой угол φ_0 , $\varphi_0 \neq 0$, при этом $c_1^2 = H_0^2 \sin^2 \varphi_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть нормальная связность поверхности F^2 класса C^k , $k \geq 4$, в пространстве R^4 постоянной кривизны R_0 не является плоской и поверхность не имеет асимптотических направлений. Тогда нормальное кручение поверхности F^2 равно нулю в любой точке и по любому направлению ($\chi_n(x, t^i) \equiv 0 \quad \forall x \in F^2, \forall (t^1, t^2) \in T_x F^2$) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) F^2 лежит в пространстве R^4 постоянной положительной кривизны $R_0 = 3c_0^2 > 0$, $c_0 = \text{const}$;

- 2) F^2 имеет постоянную положительную внутреннюю кривизну $K_i = c_0^2 > 0$;
 3) эллипс нормальной кривизны каждой точки поверхности является окружностью радиуса c_0 с центром в этой точке.

2. Выведем уравнения, описывающие поверхности F^2 в R^4 с условием $\chi_n(x, t^i) \equiv 0 \forall x \in F^2, \forall (t^1, t^2) \in T_x F^2$. С этой целью введем в рассмотрение вторые квадратичные формы поверхности F^2 относительно нормали $n_\sigma^\alpha: II_\sigma = b_{\sigma ij} dx^i dx^j$, где

$$b_{\sigma ij} = a_{\alpha\beta} \nabla_j^* t_i^\alpha \cdot n_\sigma^\beta, \quad \nabla_j^* t_i^\alpha = \partial_j t_i^\alpha - \Gamma_{ij}^k t_k^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha t_i^\beta t_j^\gamma;$$

$\Gamma_{ij}^k, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ – символы Кристоффеля, вычисленные, соответственно, по тензорам g_{ij} и $a_{\alpha\beta}$.

Запишем уравнение геодезической $l_g: x^i = x^i(s)$ в пространственных координатах y^α . Имеем $l_g: y^\alpha = f^\alpha(x^1(s), x^2(s)) \equiv F^\alpha(s)$. Используя формулы Френе, находим

$$\frac{\overline{D}F^\alpha}{ds} = T^\alpha, \quad \frac{\overline{D}T^\alpha}{ds} = km^\alpha,$$

где k – кривизна кривой l_g в R^4 . Далее считаем, что $k \neq 0$. В силу формул Гаусса $\nabla_j^* t_i^\alpha = b_{ij}^\sigma \cdot n_\sigma^\alpha$, где $b_{ij}^\sigma = g^{\sigma\tau} b_{\tau ij}$, $\|g^{\sigma\tau}\| = \|g_{\sigma\tau}\|^{-1}$, имеем

$$\frac{\overline{D}T^\alpha}{ds} = b_{ij}^\sigma \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \cdot n_\sigma^\alpha.$$

Полагая $k^\sigma = b_{ij}^\sigma \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}$ и учитывая, что $k^2 = g_{\sigma\tau} k^\sigma k^\tau$, находим $m^\alpha = \frac{k^\sigma}{k} n_\sigma^\alpha$. Выполняя ковариантное дифференцирование $\overline{D}/ds$ левой и правой части этой формулы вдоль кривой l_g , убеждаемся, что обращение в нуль нормальной составляющей вектора $\overline{D}m^\alpha/ds$ в точках кривой l_g эквивалентно выполнению соотношения

$$\frac{\overline{D}k^3}{ds} \cdot k^4 - k^3 \frac{\overline{D}k^4}{ds} = 0.$$

Перепишем это соотношение в виде $\nabla_{ij}^{[3} b_{ii}^{4]} \cdot b_{lm}^{[3} t^i t^j t^k t^l t^m = 0$, где квадратные скобки означают альтернирование по индексам.

Из полученной формулы следует, что условие $\chi_n(x, t^i) \equiv 0 \forall x \in F^2, \forall (t^1, t^2) \in T_x F^2$, эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} b_{ii}^{[3} \nabla_i b_{ii}^{4]} &= 0, \\ 2b_{ij}^{[3} \nabla_i b_{ii}^{4]} + 3b_{ii}^{[3} \nabla_i b_{ij}^{4]} &= 0, \\ 6b_{ij}^{[3} \nabla_j b_{ii}^{4]} + 3b_{ii}^{[3} \nabla_j b_{ij}^{4]} + b_{jj}^{[3} \nabla_i b_{ii}^{4]} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ниже мы исследуем разрешимость системы (1), присоединив к ней систему уравнений Кодацци–Гаусса–Риччи, записанную для поверхности F^2 :

$$\nabla_{[i} b_{j]k}^0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=3}^4 (b_{11}^\sigma b_{22}^\sigma - b_{12}^\sigma b_{12}^\sigma) &= R_{12,12} - R_0 \cdot g, \\ g^{hl} (b_{12}^3 b_{h1}^4 - b_{l1}^3 b_{h2}^4) &= R_{12,34}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$; $R_{12,12}, R_{12,34}$ – компоненты тензоров кривизны, вычисленные, соответственно, по коэффициентам касательной Γ_{jk}^i и нормальной связности $\Gamma_{i\tau}^\sigma = g^{\sigma\lambda} \Gamma_{\lambda, i\tau}$;

$\Gamma_{\lambda, i\tau} = a_{\alpha\beta} n_\lambda^\alpha \cdot \nabla_i^* n_\tau^\beta$. Далее формы $ds^2, II_0, \overline{\omega}_{0\tau} = \Gamma_{0, i\tau} dx^i$ будем называть *основными формами* поверхности F^2 .

3. Будем отыскивать положительно определенный симметрический второго порядка тензор g_{ij} , тензор b_{ij}^σ порядка $(2; 1)$, симметрический по индексам i, j , и коэффициенты нормальной связности $\Gamma_{i\tau}^\sigma$, удовлетворяющие системе (1), (2) в области D изменения переменных x^1, x^2 .

Так как указанная система записана в тензорной форме, мы перепишем ее в конкретной системе координат (x^i) на поверхности F^2 для специальным образом подобранного нормального оснащения $\{n_\sigma^\alpha\}$. Такой подход в решении систем (1), (2) позволит считать заранее известными некоторые компоненты искомых величин. Этой цели служит следующая

ЛЕММА. *На поверхности F^2 класса C^k , $k \geq 3$, без асимптотических направлений существует параметризация (x^i) и регулярное нормальное оснащение $\{n_\sigma^\alpha\}$ такие, что*

- 1) $b_{12}^3 \equiv b_{12}^4 \equiv 0$, если каждая точка x поверхности F^2 лежит вне эллипса кривизны в $N_x F^2$; $b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 \neq 0$, $b_{11}^4 \cdot b_{22}^4 \neq 0$;
- 2) $b_{12}^3 \equiv b_{12}^4 \equiv 0$, если каждая точка x поверхности F^2 лежит внутри эллипса кривизны в $N_x F^2$; $b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 \neq 0$, $b_{12}^4 \neq 0$, при этом $g_{ij} \in C^{k-2}$, $b_{ij}^\sigma \in C^{k-2}$, $\Gamma_{i\tau}^\sigma \in C^{k-3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как на поверхности F^2 отсутствуют асимптотические направления, то каждая точка x поверхности F^2 лежит либо вне эллипса нормальной кривизны в $N_x F^2$, либо внутри него. Пусть все точки поверхности F^2 являются внешними по отношению к эллипсу кривизны. Тогда одну из вторых квадратичных форм $b_{ij}^\sigma dx^i dx^j$ можно считать положительно определенной. Таким образом, на поверхности определено два семейства векторных полей класса C^{k-2} таких, что квадратичные формы II_σ , отнесенные к этим векторам в каждой точке поверхности, будут иметь канонический вид. Приняв интегральные кривые этих полей в качестве новой координатной сети, получим $b_{12}^3 \equiv 0$, $b_{12}^4 \equiv 0$, причем $g_{ij} \in C^{k-2}$, $b_{ij}^\sigma \in C^{k-2}$, $\Gamma_{i\tau}^\sigma \in C^{k-3}$, $k \geq 3$. При сделанном допущении лемма доказана.

Пусть каждая точка поверхности F^2 является внутренней по отношению к эллипсу кривизны в этой точке. Будем считать, что направления координатных линий x^i в каждой точке поверхности являются асимптотическими относительно нормали n_4^α , т.е. выполнены соотношения $b_{11}^4 \equiv b_{22}^4 \equiv 0$, $b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 < 0$.

Если $b_{12}^3 \equiv 0$, то лемма доказана. Пусть $b_{12}^3 \neq 0$. Проведем репер $\{n_\sigma^\alpha\}$ на угол α , $\alpha \neq 0$, в нормальной плоскости в положение $\{n_{\sigma'}^\alpha\}$, задав поворот репера формулами

$$n_{3'}^\alpha = \cos \alpha n_3^\alpha + \sin \alpha n_4^\alpha, \quad n_{4'}^\alpha = -\sin \alpha n_3^\alpha + \cos \alpha n_4^\alpha.$$

Коэффициенты $b_{ij}^{\sigma'}$ в новом репере принимают вид

$$b_{ij}^{3'} = \cos \alpha b_{ij}^3 + \sin \alpha b_{ij}^4, \quad b_{ij}^{4'} = -\sin \alpha b_{ij}^3 + \cos \alpha b_{ij}^4. \quad (3)$$

Покажем, что можно выбрать угол α класса C^{k-2} и поле направлений $\{m^1: m^2\}$ и $\{n^1: n^2\}$ класса C^{k-2} таким образом, чтобы выполнялись условия

$$b_{ij}^{4'} m^i m^j = 0, \quad b_{ij}^{4'} n^i n^j = 0, \quad b_{ij}^{3'} m^i n^j = 0. \quad (4)$$

Так как $\alpha \neq 0$, то $b_{11}^{4'} \neq 0$. Из первых двух уравнений системы (4) находим

$$\frac{m^1}{m^2} + \frac{n^1}{n^2} = -\frac{2b_{12}^{4'}}{b_{11}^{4'}}, \quad \frac{m^1}{m^2} \cdot \frac{n^1}{n^2} = \frac{b_{22}^{4'}}{b_{11}^{4'}}. \quad (5)$$

В силу (5) третье уравнение системы (4) принимает вид

$$b_{11}^{3'} \cdot b_{22}^{4'} - 2b_{12}^{3'} \cdot b_{12}^{4'} + b_{22}^{3'} \cdot b_{11}^{4'} = 0.$$

Используя формулы (3), перепишем это выражение в виде

$$\sin 2\alpha (b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 - b_{12}^3 \cdot b_{12}^3 + b_{12}^4 \cdot b_{12}^4) + 2 \cos 2\alpha b_{12}^3 \cdot b_{12}^4 = 0.$$

Так как каждая точка поверхности F^2 является внутренней по отношению к эллипсу кривизны в этой точке, то $b_{12}^4 \neq 0$. Выберем угол α по формуле

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^3 b_{12}^3 + b_{12}^4 b_{12}^4}{2b_{12}^3 b_{12}^4}.$$

При таком выборе угла α в новом соотношении $\{n_{\sigma'}^{\alpha}\}$ имеют место формулы (4), если направления $\{m^1: m^2\}$ и $\{n^1: n^2\}$ выбраны по формулам (5). Так как $b_{ij}^{\sigma} \in C^{k-2}$, $k \geq 3$, то $\alpha \in C^{k-2}$ и потому $b_{ij}^{\sigma'} \in C^{k-2}$, $k \geq 3$. Перейдем от координат (x^i) к координатам $(x^{i'})$ таким образом, чтобы в каждой точке поверхности координатные линии $x^{i'}$ имели выбранные направления $\{m^1: m^2\}$ и $\{n^1: n^2\}$. Тогда в новых координатах $(x^{i'})$ будем иметь $b_{1'1'}^{4'} \equiv b_{2'2'}^{4'} \equiv 0$, $b_{1'2'}^{3'} \equiv 0$, $g_{i'j'}, b_{i'j'}^{\sigma'} \in C^{k-2}$, $k \geq 3$, $\Gamma_{i'\tau'}^{\sigma'} \in C^{k-3}$, $k \geq 3$. Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как нормальная связность поверхности плоская, то на поверхности существует сеть линий кривизны. Примем ее в качестве координатной сети. Тогда $g_{12} \equiv b_{12}^4 \equiv b_{12}^4 = 0$ для любого нормального оснащения. Выберем нормальный репер $\{n_{\sigma}^{\alpha}\}$ на поверхности таким образом, чтобы $\Gamma_{i\tau}^{\sigma} \equiv 0$. Из первого и второго уравнений системы (1) находим $b_{11}^4 = \alpha_0 b_{11}^3$, $b_{22}^4 = \beta_0 b_{22}^3$, где $\alpha_0 = \operatorname{const}$, $\beta_0 = \operatorname{const}$. Из первого уравнения системы (2) с учетом полученных соотношений находим

$$\partial_2 g_{11} \cdot b_{22}^3 (\beta_0 - \alpha_0) = 0, \quad \partial_1 g_{22} \cdot b_{11}^3 (\beta_0 - \alpha_0) = 0.$$

Исследуем эти соотношения.

а) Пусть $b_{11}^3 \equiv 0$ (или $b_{22}^3 \equiv 0$). Тогда $b_{11}^4 \equiv 0$ (или $b_{22}^4 \equiv 0$), и потому каждая точка поверхности является концом эллипса кривизны, вырожденного в отрезок. Так как каждая точка поверхности F^2 не должна принадлежать эллипсу кривизны в этой точке, этот случай невозможен.

б) Пусть $\alpha_0 = \beta_0$. Тогда все точки поверхности являются аксиальными, причем угол наклона отрезка индикатрисы кривизны к орту n_3^{α} постоянен на всей поверхности. Так как на поверхности F^2 отсутствуют асимптотические направления, отсюда вытекает, что поверхность F^2 лежит на вполне геодезической гиперповерхности (см., например, [8, с. 113]).

в) Пусть $b_{11}^3 \neq 0$, $b_{22}^3 \neq 0$, $\alpha_0 \neq \beta_0$. Тогда из уравнения (7) следует, что $g_{11} = g_{11}(u^1)$, $g_{22} = g_{22}(u^2)$. Переходя к новым координатам (u, ν) , не меняющим координатной сети

на поверхности, можно добиться, чтобы $g_{11} \equiv 1$, $g_{22} \equiv 1$, $g_{12} \equiv 0$. Тогда в новых координатах из второго уравнения системы (2) находим $b_{11}^3 b_{22}^3 (1 + \alpha_0 \beta_0) + R_0 = 0$. Если $R_0 = 0$, то $1 + \alpha_0 \beta_0 = 0$, что приводит к тору Клиффорда (см. [3]). Эта поверхность лежит на гиперсфере, имеет постоянную среднюю и нулевую внутреннюю кривизну и ее индикатриса кривизны просматривается из точки поверхности под углом $\pi/2$. Если $R_0 \neq 0$, то $1 + \alpha_0 \beta_0 \neq 0$, и потому $b_{22}^3 = -R_0/(b_{11}^3(1 + \alpha_0 \beta_0))$.

Подставляя это значение b_{22}^3 в третью формулу системы (1), находим $b_{11}^3 \equiv \text{const}$, $b_{22}^3 \equiv \text{const}$. Но тогда имеем $b_{11}^4 \equiv \text{const}$, $b_{22}^4 \equiv \text{const}$. Поворотом репера $\{n_\sigma^\alpha\}$ на постоянный угол $\psi_0 = \arctg((b_{22}^4 - b_{11}^4)/(b_{22}^3 - b_{11}^3))$ в положение $\{n_{\sigma'}^\alpha\}$ можно добиться того, чтобы вторые квадратичные формы поверхности F^2 приняли вид $II_3 = b_1 du^2 + b_2 dv^2$, $II_4 = c_1(du^2 + dv^2)$, $c_1 > 0$, где b_1, b_2, c_1 – постоянные, связанные в силу уравнения Гаусса соотношением $b_1 b_2 + c_1^2 + R_0 = 0$; при этом в новом репере $\{n_{\sigma'}^\alpha\}$ имеем $\Gamma_{i\tau'}^{\sigma'} \equiv 0$. Так как $g_{11} = g_{22} \equiv 1$, $g_{12} \equiv 0$, внутренняя кривизна K_i поверхности тождественно равна нулю. Из явного вида вторых квадратичных форм поверхности F^2 следует, что средняя кривизна H поверхности F^2 постоянна и дается формулой

$$H = H_0 \equiv \frac{1}{2} \sqrt{(b_1 + b_2)^2 + 4c_1^2}.$$

Вектор средней кривизны $H^\alpha = (b_1 + b_2)n_3^\alpha/2 + c_1 n_4^\alpha$ имеет постоянный угол $\varphi_0 = \arctg(2c_1/(b_1 + b_2))$ с носителем индикатрисы кривизны, параллельным вектору n_3^α в плоскости $N_x F^2$, при этом длина l индикатрисы кривизны постоянна на поверхности и дается формулой $l = 2\sqrt{H_0^2 + R_0}$. Отсюда следует, что на рассматриваемой поверхности средняя кривизна H_0 удовлетворяет условию $H_0^2 > -R_0$. Отметим, что по любым заданным величинам H_0 с условием $H_0^2 > -R_0$ и $\varphi_0, \varphi_0 \neq 0$, поверхность F^2 с метрикой $ds^2 = du^2 + dv^2$ восстанавливается в R^4 всегда и однозначно (с точностью до движения в R^4).

Покажем, что поверхность F^2 лежит в R^4 на гиперповерхности R_1^3 кривизны $(R_0 + c_1^2) = \text{const}$ с неопределенными линиями кривизны. С этой целью рассмотрим изометрическое погружение метрики $ds^2 = du^2 + dv^2$ в виде поверхности $\tilde{F}^2$ со второй квадратичной формой $II_3 = b_1 du^2 + b_2 dv^2$, $b_1 = \text{const}$, $b_2 = \text{const}$, в пространство R_1^3 постоянной кривизны $(R_0 + c_1^2)$, $c_1^2 = H_0^2 \sin^2 \varphi_0$.

Так как уравнения Кодацци для форм ds^2 и II_3 в R_1^3 выполняются тождественно, а уравнение Гаусса выполняется в силу условия $b_1 \cdot b_2 = -(R_0 + c_1^2)$, указанное погружение форм ds^2 и II_3 в виде поверхности $\tilde{F}^2$ с единичным нормальным вектором ν^A ($A = 1, 2, 3$) в R_1^3 возможно. Будем рассматривать $\tilde{F}^2$ как поверхность в R^4 , выбрав в качестве нормального оснащения для $\tilde{F}^2$ единичный нормальный вектор ν_3^α , лежащий в R_1^3 и совпадающий с вектором ν^A , и единичный вектор нормали ν_4^α нормальным к R_1^3 вдоль $\tilde{F}^2$. Вектор уклонения $h^\alpha(x)$ точек $x + dx = (x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ поверхности $\tilde{F}^2$ от касательной геодезической к $\tilde{F}^2$ в точке $x = (x^1, x^2)$ поверхности в R^4 с точностью до членов высшего порядка относительно dx^1, dx^2 определяется формулой $h^\alpha(x) = \frac{1}{2} \tilde{II}^\sigma \nu_\sigma^\alpha$, где $\tilde{II}^\sigma = g^{\sigma\tau} \tilde{II}_\tau$ – вторые квадратичные формы поверхности $\tilde{F}^2$, вычисленные относительно нормалей ν_σ^α . Так как $\tilde{F}^2$ лежит в $R_1^3 \subset R^4$, то составляющая $\frac{1}{2} \cdot \tilde{II}^\sigma \nu_\sigma^\alpha$ вектора уклонения $h^\alpha(x)$ представляет собой уклонение точки $(x + dx)$ поверхности $\tilde{F}^2$ от касательной геодезической поверхности к $\tilde{F}^2$ в точке x в R_1^3 с точностью до бесконечно малых более высокого порядка относительно dx^1, dx^2 (см., например, [9]), т.е. совпадает с вектором $\frac{1}{2} II_3 \nu^A$ ($A = 1, 2, 3$) в R_1^3 . Так как единичный

нормальный вектор ν^A к $\tilde{F}^2$ в R_1^3 совпадает с ν_3^α в R^4 , откуда следует, что $\tilde{II}_3 \equiv II_3$. Покажем теперь, что вторая квадратичная форма $\tilde{II}_4$ поверхности $\tilde{F}^2$ в R^4 относительно нормали ν_1^α совпадает с формой $II_4 = c_1(du^2 + dv^2)$. Так как гиперповерхность в R_1^3 , имеющая кривизну $(R_0 + c_1^2)$, погружена в R^4 кривизны R_0 , имеет место формула [9] $R_0 + c_1^2 = (\Omega/3)^2 + R_0$, где Ω – средняя кривизна R_1^3 . Отсюда следует, что $\Omega/3 = c_1$. За счет выбора направления ν_4^α можно добиться того, чтобы знак Ω совпадал со знаком константы c_1 . Так как все точки поверхности R_1^3 в силу постоянства ее кривизны являются омбилическими, нормальная кривизна R_1^3 в любой точке по любому направлению совпадает с константой c_1 . Так как $\tilde{F}^2 \in R_1^3$, это означает, что вторая форма $\tilde{F}^2$ относительно нормали ν_4^α имеет вид $\tilde{II}_4 = c_1(du^2 + dv^2)$, $c_1^2 = H_0^2 \sin^2 \varphi_0$.

Покажем теперь, что для $\tilde{F}^2$ в R^4 имеем $\tilde{\omega}_{34} = a_{\alpha\beta} \nu_3^\alpha \cdot \nabla_i^* \nu_4^\beta \cdot du^i \equiv 0$. Для этого продифференцируем тензор ν_4^α ковариантно по переменной x^i в R^4 . Дифференцирование предполагает смещение по линии x^i на $\tilde{F}^2$ в R^4 , а следовательно, смещение по R_1^3 в R^4 . Так как линии кривизны на R_1^3 неопределены, любое направление на R_1^3 является главным и потому имеют место формулы Родрига

$$\nabla_i^* \nu_4^\alpha = -\frac{\Omega}{3} t_i^\alpha. \quad (6)$$

Это означает, что тензор $\nabla_i^* \nu_4^\alpha$ принадлежит касательной плоскости к $\tilde{F}^2$. Но тогда находим $a_{\alpha\beta} \nu_3^\alpha \cdot \nabla_i^* \nu_4^\beta = 0$, т.е. на $\tilde{F}^2$ имеем $\tilde{\Gamma}_{i\tau}^\sigma \equiv 0$, и потому $\tilde{\omega}_{34} \equiv \Gamma_{3,i4} du^i \equiv 0$. Таким образом, основные формы поверхностей $\tilde{F}^2$ и F^2 в R^4 совпадают и в силу известной теоремы дифференциальной геометрии [9] поверхности $\tilde{F}^2$ и F^2 в R^4 отличаются на движение. В связи с этим можно считать, что F^2 принадлежит в R^4 некоторой гиперповерхности постоянной кривизны $(R_0 + c_1^2)$. Теорема 1 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть каждая точка поверхности является внешней по отношению к эллипсу кривизны в этой точке. Тогда в силу леммы на поверхности существует сопряженная координатная сеть, для которой $b_{12}^3 \equiv b_{12}^4 \equiv 0$. Из первого уравнения системы (1) при $i = 1, 2$ в этом случае следует, что

$$\Gamma_{14}^3 = \partial_1 \left(\arctg \frac{b_{11}^4}{b_{11}^3} \right), \quad \Gamma_{24}^3 = \partial_2 \left(\arctg \frac{b_{11}^4}{b_{11}^3} \right).$$

Эти условия означают, что нормальная связность поверхности является плоской, а это противоречит условию теоремы. Следовательно, при сделанных предположениях в R^4 не существует поверхности с $\chi_n(x, t^i) \equiv 0 \quad \forall x \in F^2, \forall (t^1, t^2) \in T_x F^2$.

Пусть каждая точка поверхности является внутренней по отношению к эллипсу кривизны в этой точке. Каждую поверхность, обладающую свойством $\chi_n(x, t^i) \equiv 0 \quad \forall x \in F^2, \forall (t^1, t^2) \in T_x F^2$, будем обозначать через F_*^2 .

Покажем, что на поверхности F_*^2 всегда существуют координаты (x^i) и нормальное оснащение $\{n_\sigma^\alpha\}$ такие, что

$$b_{11}^4 = b_{22}^4 = b_{12}^3 = 0, \quad b_{12}^4 \cdot b_{12}^4 + b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 = 0. \quad (7)$$

В самом деле, в силу леммы можно считать, что $b_{11}^4 = b_{22}^4 = b_{12}^3 = 0$. Тогда из первого уравнения системы (1) при $i = 1$ и $i = 2$ находим

$$\Gamma_{13}^4 \cdot b_{11}^3 = 2\Gamma_{11}^2 \cdot b_{12}^4, \quad \Gamma_{23}^4 \cdot b_{22}^3 = 2\Gamma_{22}^2 \cdot b_{12}^4. \quad (8)$$

Система (1) при этом принимает вид

$$\bar{\nabla}_i b_{ii}^4 = 0, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$2b_{ij}^4 \bar{\nabla}_i b_{ii}^3 - 3b_{ii}^3 \bar{\nabla}_i b_{ij}^4 = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (10)$$

$$2b_{ij}^4 \bar{\nabla}_i b_{jj}^3 - b_{jj}^3 \bar{\nabla}_i b_{ij}^4 = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (11)$$

Обратимся к уравнению Гаусса (21), переписав его в виде

$$b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^4 b_{12}^4 = \tilde{K} \cdot g, \quad (12)$$

где $\tilde{K} = R_{12,12}/g - R_0$.

Дифференцируя соотношение (12) по переменной x^i , находим

$$\partial_i b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 + b_{11}^3 \partial_i b_{22}^3 - 2b_{12}^4 \partial_i b_{12}^4 = \partial_i \tilde{K} \cdot g + \tilde{K} \partial_i g, \quad i = 1, 2.$$

Воспользуемся формулой Фосса–Вейля $\partial_i \ln \sqrt{g} = \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2$, $i = 1, 2$, выражением для $\tilde{K}$ из формулы (12) и перепишем полученное соотношение в виде

$$(\partial_i b_{11}^3 - 2\Gamma_{i1}^1 b_{11}^3) b_{22}^3 + b_{11}^3 (\partial_i b_{22}^3 - 2\Gamma_{i2}^2 b_{22}^3) - 2b_{12}^4 (\partial_i b_{12}^4 - \Gamma_{i1}^1 b_{12}^4 - \Gamma_{i2}^2 b_{12}^4) = \partial_i \tilde{K} \cdot g, \\ i = 1, 2.$$

Запишем это соотношение, используя символику ковариантного дифференцирования $\bar{\nabla}$. Так как координаты x^i на поверхности F_*^2 и оснащение $\{n_\sigma^\alpha\}$ вдоль F_*^2 выбраны так, что $b_{11}^4 = b_{22}^4 = b_{12}^3 = 0$, имеют место формулы

$$\bar{\nabla}_i b_{11}^3 \equiv \partial_i b_{11}^3 - \Gamma_{i1}^k b_{k1}^3 - \Gamma_{i1}^k b_{1k}^3 + \Gamma_{i\sigma}^3 b_{11}^\sigma = \partial_i b_{11}^3 - 2\Gamma_{i1}^1 b_{11}^3, \\ \bar{\nabla}_i b_{22}^3 \equiv \partial_i b_{22}^3 - \Gamma_{i2}^k b_{k2}^3 - \Gamma_{i2}^k b_{2k}^3 + \Gamma_{i\sigma}^3 b_{22}^\sigma = \partial_i b_{22}^3 - 2\Gamma_{i2}^2 b_{22}^3, \\ \bar{\nabla}_i b_{12}^4 \equiv \partial_i b_{12}^4 - \Gamma_{i1}^k b_{k2}^3 - \Gamma_{i2}^k b_{1k}^4 + \Gamma_{i\sigma}^3 b_{22}^\sigma = \partial_i b_{12}^4 - 2\Gamma_{i1}^1 b_{12}^4 - \Gamma_{i2}^2 b_{12}^4.$$

Поэтому полученное выше соотношение можно записать в виде

$$\bar{\nabla}_i b_{11}^3 b_{22}^3 + b_{11}^3 \bar{\nabla}_i b_{22}^3 - 2b_{12}^4 \bar{\nabla}_i b_{12}^4 = \partial_i \tilde{K} \cdot g, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Соотношение (13) можно переписать в виде

$$2b_{ij}^4 \bar{\nabla}_i b_{ij}^4 = b_{jj}^3 \bar{\nabla}_i b_{ii}^3 + b_{ii}^3 \bar{\nabla}_i b_{jj}^3 - \partial_i \tilde{K} \cdot g, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Так как $b_{ij}^4 \neq 0$ при $i \neq j$, находя из последнего соотношения величину $\bar{\nabla}_i b_{ij}^4$ и подставляя ее в уравнение (10), получим

$$(-4b_{ij}^4 b_{ij}^4 + 3b_{ii}^3 b_{jj}^3) \bar{\nabla}_i b_{ii}^3 + 3b_{ii}^3 b_{ii}^3 \bar{\nabla}_i b_{jj}^3 - 3b_{ii}^3 g \partial_i \tilde{K} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (14)$$

С другой стороны, исключив из уравнений (10), (11) величину $\bar{\nabla}_i b_{ij}^4$, получим

$$b_{jj}^3 \bar{\nabla}_i b_{ii}^3 = 3b_{ii}^3 \bar{\nabla}_i b_{ij}^3, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (15)$$

Подставляя $\bar{\nabla}_i b_{ij}^3$ из формул (15) в формулу (14), получим

$$4(-b_{ij}^4 b_{ij}^4 + b_{ii}^3 b_{jj}^3) \bar{\nabla}_i b_{ii}^3 - 3b_{ii}^3 g \partial_i \tilde{K} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Это соотношение перепишем, положив сначала $i = 1, j = 2$, а затем $i = 2, j = 1$. Имеем

$$4(-b_{12}^4 b_{12}^4 + b_{11}^3 b_{22}^3) \bar{\nabla}_1 b_{11}^3 = 3b_{11}^3 g \partial_1 \tilde{K}, \quad 4(-b_{12}^4 b_{12}^4 + b_{11}^3 b_{22}^3) \bar{\nabla}_2 b_{22}^3 = 3b_{22}^3 g \partial_2 \tilde{K}.$$

В силу уравнения Гаусса (12) отсюда следует, что

$$\bar{\nabla}_i b_{ii}^3 = b_{ii}^3 \partial_i \ln \sqrt[4]{|\tilde{K}|^3}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Раскрывая в этом выражении формулу ковариантной производной $\bar{\nabla}_i b_{ii}^3 = \partial_i b_{ii}^3 - 2\Gamma_{ii}^k b_{ki}^3 + \Gamma_{i4}^3 b_{ii}^4$ и используя формулу Фосса–Вейля, перепишем с учетом $b_{ii}^4 = 0, b_{ij}^3 = 0$ при $i \neq j$ соотношение (16) в виде

$$\partial_1 \ln \frac{|b_{11}^3|}{g \sqrt[4]{|\tilde{K}|^3}} = -2\Gamma_{12}^2, \quad \partial_2 \ln \frac{|b_{22}^3|}{g \sqrt[4]{|\tilde{K}|^3}} = -2\Gamma_{21}^1. \quad (17)$$

В силу уравнения Гаусса (12) имеем

$$\frac{|b_{11}^3|}{\sqrt[4]{|\tilde{K}|^3}} = \frac{|b_{11}^3| \sqrt[4]{|\tilde{K}|}}{|b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^4 b_{12}^4|},$$

поэтому соотношения (17) принимают вид

$$-2\Gamma_{ij}^j = \partial_i \ln \frac{|b_{ii}^3| \sqrt[4]{|\tilde{K}|}}{|b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^4 b_{12}^4|}, \quad i \neq j. \quad (18)$$

В формуле (18) в левой части индекс j не является индексом суммирования.

Далее из формулы (15) в силу формул (16) следует

$$\frac{\bar{\nabla}_i b_{jj}^3}{b_{jj}^3} = \partial_i \ln \sqrt[4]{|\tilde{K}|}. \quad (19)$$

Раскрывая знак ковариантной производной $\bar{\nabla}_i b_{jj}^3 = \partial_i b_{jj}^3 - 2\Gamma_{ij}^k b_{kj}^3 + \Gamma_{i4}^3 b_{jj}^4$ и учитывая, что $b_{jj}^4 = 0, b_{kj}^3 = 0$ при $k \neq j$, соотношение (19) преобразуем к виду

$$\partial_i \ln \frac{\sqrt[4]{|\tilde{K}|}}{|b_{jj}^3|} = -2\Gamma_{ij}^j \quad (\text{по индексу } j \text{ не суммировать!}), \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (18), находим

$$\partial_i \ln \frac{|b_{ii}^3| \cdot |b_{jj}^3|}{|b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^4 b_{12}^4|} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

Отсюда следует, что $|b_{11}^3| \cdot |b_{22}^3| = c|b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^4 b_{12}^4|$, где $c = \text{const}$, $c > 0$.

Так как рассматриваемая точка x поверхности F_*^2 является внутренней по отношению к эллипсу кривизны в нормальной плоскости, а точки пересечения носителя вектора n_3^α с эллипсом кривизны соответствуют координатным направлениям $\{1, 0\}$ и $\{0, 1\}$ на поверхности в точке x , то $b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 < 0$ и потому предыдущее соотношение можно переписать в виде $b_{11}^3 \cdot b_{22}^3 = c(b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^4 b_{12}^4)$. Полагая $q = (c - 1)/c$, $q = \text{const}$, отсюда находим

$$b_{12}^4 \cdot b_{12}^4 = qb_{11}^3 b_{22}^3. \quad (20)$$

Покажем, что $q = -1$.

Обратимся к уравнениям Кодацци (22). Полагая $\sigma = 3$ и учитывая, что $b_{12}^3 = 0$, $b_{ii}^4 = 0$, $i = 1, 2$, запишем их в силу формул (8), (20) в виде

$$\partial_2 b_{11}^3 = -(1 + 2q) \cdot b_{22}^3 \Gamma_{11}^2 + b_{11}^3 \Gamma_{12}^1, \quad \partial_1 b_{22}^3 = -(1 + 2q) \cdot b_{11}^3 \Gamma_{22}^1 + b_{22}^3 \Gamma_{12}^2. \quad (21)$$

Полагая в формуле (15) $i = 1, j = 2$, а затем $i = 2, j = 1$, перепишем (15) с учетом (20), (8) в виде

$$\begin{aligned} b_{22}^3 \partial_1 b_{11}^3 &= (2\Gamma_{11}^1 - 3\Gamma_{12}^2) b_{11}^3 b_{22}^3 - 3(1 + 2q) \Gamma_{22}^1 b_{11}^3 b_{11}^3, \\ b_{11}^3 \partial_2 b_{22}^3 &= (2\Gamma_{22}^2 - 3\Gamma_{12}^1) b_{22}^3 b_{11}^3 - 3(1 + 2q) \Gamma_{11}^2 b_{22}^3 b_{22}^3. \end{aligned} \quad (22)$$

Из уравнений Кодацци при $\sigma = 4$ находим с учетом (8), (20)

$$\begin{aligned} b_{22}^3 \partial_1 b_{12}^4 &= (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) b_{12}^4 b_{22}^3 - 2\Gamma_{22}^1 b_{12}^4 b_{11}^3, \\ b_{11}^3 \partial_2 b_{12}^4 &= (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) b_{12}^4 b_{11}^3 + 2\Gamma_{11}^2 b_{12}^4 b_{22}^3. \end{aligned} \quad (23)$$

Дифференцируя соотношение (20) по переменной x^i , получим

$$2b_{12}^4 \partial_i b_{12}^3 = q(\partial_i b_{11}^3 b_{22}^3 + 2b_{11}^3 \partial_i b_{11}^3), \quad i = 1, 2.$$

Подставляя сюда формулы (22), (23), находим при $i = 1$

$$\begin{aligned} 2b_{12}^4 \left(\Gamma_{11}^1 b_{12}^4 - \Gamma_{12}^2 b_{12}^4 + 2\Gamma_{22}^1 b_{12}^4 \frac{b_{11}^3}{b_{22}^3} \right) &= qb_{22}^3 \left[(2\Gamma_{11}^1 - 3\Gamma_{12}^2) b_{11}^3 - 3(1 + 2q) \Gamma_{22}^1 \frac{b_{11}^3 b_{11}^3}{b_{22}^3} \right] \\ &+ qb_{11}^3 [-(1 + 2q) \Gamma_{22}^1 b_{11}^3 + \Gamma_{12}^2 b_{22}^3]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$8b_{11}^3 (1 + q) \Gamma_{22}^1 = 0. \quad (24)$$

Аналогично, при $i = 2$ находим

$$8b_{22}^3 (1 + q) \Gamma_{11}^2 = 0. \quad (25)$$

Так как Γ_{i4}^3 , $i = 1, 2$, одновременно не равны нулю, $b_{11}^3 \neq 0$, $b_{22}^3 \neq 0$, из формул (8), (24), (25) следует, что $q = -1$. Это доказывает второе соотношение (7). Геометрический смысл последней формулы в (7) заключается в том, что каждая точка x поверхности F_*^2 является фокусом эллипса кривизны в $N_x F_*^2$.

Повернем репер $\{n_\sigma^\alpha\}$, существование которого доказано по формулам (7), на некоторый угол $\check{\alpha}$ в положение $\{n_{\sigma'}^\alpha\}$. Пусть $\{m_1: n_1\}$ и $\{m_2: n_2\}$ – направления в точке x , асимптотические относительно нормали $n_{4'}^\alpha$. Покажем, что эти направления сопряжены относительно нормали $n_{3'}^\alpha$ для любого значения $\check{\alpha}$. Для этого запишем условие сопряженности относительно $n_{3'}^\alpha$:

$$\cos \check{\alpha} \cdot b_{11}^3 m_1 m_2 + \sin \check{\alpha} \cdot b_{12}^3 (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \cos \check{\alpha} \cdot b_{22}^3 n_1 n_2 = 0.$$

Учитывая, что $\{m_1: n_1\}$ и $\{m_2: n_2\}$ связаны соотношением

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{b_{22}^3}{b_{11}^3}, \quad \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = 2 \operatorname{ctg} \check{\alpha} \cdot \frac{b_{12}^4}{b_{11}^3},$$

последнее соотношение приведем к виду

$$2 \cos \check{\alpha} (b_{11}^3 b_{22}^3 + b_{12}^4 b_{12}^4) = 0.$$

Это соотношение выполняется тождественно для любого значения $\check{\alpha}$ в силу формул (7). Это означает, что для поверхности F_*^2 асимптотические направления относительно нормали $n_{4'}^\alpha$ всегда являются сопряженными для нормали $n_{3'}^\alpha$ в любом ортонормированном репере $\{n_\sigma^\alpha\}$.

В дальнейшем считаем, что репер $\{n_\sigma^\alpha\}$ и координаты (x^i) выбраны на F_*^2 так, что $g_{12} = b_{12}^3 = b_{11}^4 = b_{22}^4 = 0$. Этого всегда можно добиться, выбрав носитель $n_{3'}^\alpha$, проходящим через центр эллипса кривизны в $N_x F_*^2$.

Интегрируя при этих условиях уравнения Кодацци, находим

$$\left(\frac{b_{22}^3}{g_{22}}\right)^2 = \left(\frac{b_{12}^4}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right)^3 \tilde{U}^{-8}, \quad \left(\frac{b_{11}^3}{g_{11}}\right)^2 = \left(\frac{b_{12}^4}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right)^3 \tilde{V}^{-8},$$

где $\tilde{U}, \tilde{V}$ – некоторые функции переменных x^1, x^2 соответственно. Полагая $b_{11}^3/g_{11} = a^2$, $b_{22}^3/g_{22} = -b^2$, находим с учетом соотношения (7), что $a = \tilde{U}^3 \tilde{V} > 0$, $b = \tilde{U} \tilde{V}^3 > 0$.

Если $\tilde{U} \equiv \tilde{V}$, то $\tilde{U} = c_0 = \text{const}$, $\tilde{V} = c_0 = \text{const}$, и тогда основные формы поверхности F_*^2 принимают вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= E(du^2 + dv^2), & II_3 &= c_0 E(du^2 - dv^2), \\ II_4 &= 2c_0 E du dv, & \omega &= -\frac{E_v}{E} du + \frac{E_u}{E} dv. \end{aligned} \quad (26)$$

где $c_0 = \text{const}$, а функция E находится из систем уравнений (1), (2). Следует отметить, что все уравнения систем (1), (2), кроме уравнений Гаусса и Риччи выполняются тождественно. Уравнение Гаусса имеет вид $-\Delta \ln E = 2E(-2c_0^2 + R_0)$, где R_0 – кривизна пространства R^4 , Δ – оператор Лапласа. Уравнение Риччи для форм (26) имеет вид $-\Delta \ln E = 2c_0^2 E$.

Сравнивая уравнения Гаусса и Риччи, находим $R_0 = 3c_0^2$, при этом $(-\frac{1}{2E} \Delta \ln E) = c_0^2$. Это означает, что поверхность F_*^2 имеет постоянную внутреннюю кривизну $K_i = c_0^2 > 0$ и является аналогом куска поверхности Веронезе в $S^4 \subset E^5$.

Пусть $0 < \tilde{U} < \tilde{V}$. Тогда в силу уравнений Кодаци мы имеем

$$g_{11} = \tilde{c}_1^4(x^1) \frac{|\tilde{U}^4 - \tilde{V}^4|}{\tilde{V}^4}, \quad g_{22} = \tilde{c}_2^4(x^2) \frac{|\tilde{U}^4 - \tilde{V}^4|}{\tilde{U}^4},$$

где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ – некоторые положительные функции своих аргументов. Полагая

$$u = \int \tilde{U}^2(x^1) \tilde{c}_1^2(x^1) dx^1, \quad \nu = \int \tilde{V}^2(x^2) \tilde{c}_2^2(x^2) dx^2,$$

находим основные формы поверхности F_*^2 в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= (U^2 - V^2) (du^2 + d\nu^2), \quad U > V > 0, \\ II_3 &= \frac{U^2 - V^2}{U^3 V} du^2 - \frac{U^2 - V^2}{U V^3} d\nu^2, \quad II_4 = \frac{2(U^2 - V^2)}{U^2 V^2} du d\nu, \\ \omega &= -\frac{2UV'}{U^2 - V^2} du - \frac{2VU'}{U^2 - V^2} d\nu, \end{aligned} \quad (27)$$

где U, V – дважды дифференцируемые функции аргументов u, ν соответственно.

Отметим, что коэффициенты форм (27) удовлетворяют уравнениям систем (1) и (2), кроме уравнений Гаусса и Риччи. Для нахождения функций U, V выпишем уравнения Гаусса и Риччи. Уравнение Гаусса имеет вид

$$-\frac{1}{2E} \Delta \ln E = \frac{b_{11}^3 b_{22}^3 - b_{12}^4 b_{12}^4}{E^2} R_0,$$

где $E = U^2 - V^2$. Выполняя дифференцирование функции E , находим

$$UU'' - VV'' = \frac{U^2 + V^2}{U^2 - V^2} (U'^2 - V'^2) + 2 \frac{(U^2 - V^2)^3}{U^4 V^4} - R_0 (U^2 - V^2)^2, \quad (28)$$

где знак “'” означает дифференцирование.

Уравнение Риччи имеет вид

$$\partial_2 \Gamma_{14}^3 - \partial_1 \Gamma_{24}^3 = \frac{1}{E} (b_{22}^3 b_{12}^4 - b_{11}^3 b_{12}^4), \quad \text{где } E = U^2 - V^2.$$

Подставляя сюда значения $\Gamma_{ij}^3, b_{ij}^\sigma$ из формул (27) и выполняя дифференцирование, находим

$$VU'' - UV'' = \frac{2UV}{U^2 - V^2} (U'^2 + V'^2) - \frac{(U^2 - V^2)(U^2 + V^2)}{2U^5 V^5}. \quad (29)$$

Из соотношений (28), (29) получаем

$$U'' = \frac{U}{U^2 - V^2} (U'^2 + V'^2) + c_1, \quad V'' = -\frac{V}{U^2 - V^2} (U'^2 + V'^2) + c_2, \quad (30)$$

где

$$c_1 = \frac{5U^4 - 4U^2 V^2 - V^4}{2U^5 V^4} - R_0 U (U^2 - V^2), \quad c_2 = \frac{-5V^4 + 4U^2 V^2 + U^4}{2U^4 V^5} - R_0 V (U^2 - V^2).$$

Дифференцируя первое уравнение системы (30) по переменной ν , а второе – по u , и подставляя в полученный результат производные $\partial_1 c_2, \partial_2 c_1$, находим

$$V'(-9V^4 + 18U^2 V^2 - 9U^4) = 0, \quad U'(9U^4 - 18U^2 V^2 + 9V^4) = 0.$$

Так как $U^2 - V^2 > 0$, отсюда следует, что $U' = V' = 0$. Но тогда из формул (15) следует, что $\omega \equiv 0$. Это означает, что нормальная связность поверхности F_*^2 является плоской. Полученное противоречие означает, что поверхностей типа F_*^2 с основными формами вида (27) в пространстве R^4 не существует. Теорема 2 доказана.

Автор признателен рецензенту за указанные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fessler W. Über die normaltorsion von Flächen im vierdimensionalen euklidischen Raum // Comm. Math. Helv. 1959. V. 33. № 2. P. 89–108.
- [2] Кадомцев С. Б. Исследование некоторых свойств нормального кручения 2-мерных поверхностей в 4-мерном пространстве // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 7. М.: ВИНТИ, 1975. С. 267–278.
- [3] Фоменко В. Т. Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 // Матем. сб. 1978. Т. 106(148). № 4.
- [4] Фоменко В. Т. Некоторые результаты теории двумерных поверхностей в E^4 // Деп. ВИНТИ № 4062-И87. М.: ВИНТИ, 1987. С. 2–118.
- [5] Масальцев Л. А. О двумерных поверхностях с нулевым нормальным кручением // УГС. 1984. Т. 27. С. 88–91.
- [6] Bang-yen Chen, Shi-jie Li. Classification of surfaces with pointwise planar normal sections and its application to Fomenko's conjecture // J. Geometry. 1986. V. 26. P. 21–34.
- [7] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.
- [8] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. II. М.: ГИИЛ, 1948.
- [9] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948.

Таганрогский государственный педагогический институт

Поступило

10.11.2001

Исправленный вариант

04.09.2003