Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Курина, Г. В. Мартыненко, Приводимость одного класса оператор-функций к блочно-диагональной форме, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 789–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:34:25

ПРИВОДИМОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ К БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Г. А. Курина, Г. В. Мартыненко

1. В [1] рассматривалась условная приводимость к блочно-диагональной форме неотрицательно-гамильтоновой оператор-функции, т.е. функции, имеющей матричное представление вида

$$\begin{pmatrix} A(t) & S(t) \\ W(t) & -A^*(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где при всех $-\infty < t < +\infty$ линейные ограниченные, непрерывные по t операторы $A(t)$, $S(t)$, $W(t)$ действуют в вещественном гильбертовом пространстве; звездочка с обозначением оператора означает сопряженный оператор, $S(t)$ и $W(t)$ – симметрические неотрицательные операторы.

Непрерывная на компакте K оператор-функция $D(t)$ со значениями в $L(X)$ называется *условно* (X^-, X^+) -*приводимой*, если найдется непрерывная по t оператор-функция $V(t) \in L(X)$, которая при всех $t \in K$ является изоморфизмом и

$$V^{-1}(t)D(t)V(t) = \text{diag}(D_-(t), D_+(t)), \quad (2)$$

где $D_-(t) \in L(X^-)$, $D_+(t) \in L(X^+)$, $X = X^- \dot{+} X^+$ и при каждом фиксированном $t \in K$ спектр $D_-(t)(D_+(t))$ расположен в левой (правой) открытой полуплоскости.

Если $D(t)$ – T -периодическая (почти периодическая) оператор-функция, то такое же условие T -периодичности (почти периодичности) предъявляется и к функции $V(t)$.

Как указано в [2], вещественная периодическая матрица не всегда условно приводима при помощи вещественной матрицы того же периода. В [3] приведен пример, иллюстрирующий последнее утверждение.

В [1] для неотрицательно-гамильтоновой периодической оператор-функции, действующей в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, доказано, что если оператор-функция $A(t)$ условно приводима, то оператор-функция (1) также условно приводима. Этот результат был получен сначала для случая конечномерного вещественного пространства в [4]. Легко видеть, что в [1] условие сепарабельности пространства может быть опущено в формулировках утверждений и в доказательствах.

В [5] результаты [1] были обобщены на J -аккретивные оператор-функции, частным случаем которых являются неотрицательно-гамильтоновы оператор-функции. При этом для неотрицательно-гамильтоновых оператор-функций было получено более общее, чем в [1], достаточное условие условной приводимости. А именно, условная приводимость оператора $A(t)$ была заменена более слабым условием отсутствия при всех $t \in K$ точек спектра оператора (1) на мнимой оси (в [1], [4] такие операторы назывались грубыми, в [5] – эдихотомическими).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 99-01-00968, 02-01-00351.

В [5] существенно использовались многие нетривиальные факты из теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, понимание которых требует глубокого знакомства с этой теорией, например, по монографии [6].

В настоящей работе установлено достаточное условие условной приводимости оператор-функции вида (1) без требования симметричности и неотрицательности операторов $S(t)$ и $W(t)$, а именно, доказана

ТЕОРЕМА. Если при всех $\mu \in [0, 1]$, $t \in K$ оператор

$$\begin{pmatrix} A(t) & \mu B(t) \\ \mu C(t) & -A^*(t) \end{pmatrix} : X \dot{+} X \rightarrow X \dot{+} X, \quad (3)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – непрерывные функции переменной t со значениями в $L(X)$, X – гильбертово пространство, не имеет точек спектра на мнимой оси, то оператор-функция (3) условно приводима при любом $\mu \in [0, 1]$.

В качестве следствия из теоремы получается без привлечения индефинитного подхода результат из [5] для неотрицательно гамильтоновых оператор-функций (1) в практически важном случае отсутствия у оператора $A(t)$ при всех $t \in [0, 1]$ точек спектра на мнимой оси, поскольку тогда в силу леммы 2 из [1] неотрицательно гамильтонов оператор вида (1) также не имеет точек спектра на мнимой оси при всех $t \in [0, 1]$.

2. ЛЕММА. Если непрерывный по t оператор $A(t)$ при каждом $t \in K$ не имеет точек спектра на мнимой оси, то оператор-функция

$$\text{diag}(A(t), -A^*(t)) \quad (4)$$

условно приводима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гладкие положительно ориентированные замкнутые контуры γ_- и γ_+ , лежащие в левой и в правой полуплоскостях и охватывающие компоненты спектров операторов $A(t)$, $t \in K$, с отрицательной и положительной действительными частями соответственно (существование таких, не зависящих от t , контуров следует из непрерывности $A(t)$ при $t \in K$).

Проекторы Рисса

$$P_{\mp}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\mp}} (A(t) - \lambda I)^{-1} d\lambda \quad (5)$$

являются непрерывными функциями переменной t (см., например, [7, теорема I.2.2]).

Несложно проверить, что аналогичные (5) проекторы Рисса $\tilde{P}_{\mp}(t)$ для оператора (4) имеют следующие представления:

$$\tilde{P}_{\mp}(t) = \begin{pmatrix} P_{\mp}(t) & 0 \\ 0 & I - P_{\mp}^*(t) \end{pmatrix}.$$

Через $\tilde{X}_-(t)$ ($\tilde{X}_+(t)$) обозначим образ проектора $\tilde{P}_-(t)$ ($\tilde{P}_+(t)$).

Введем в рассмотрение два подпространства пространства $X \dot{+} X$:

$$X^- = \{(x, -x) : x \in X\}, \quad X^+ = \{(x, x) : x \in X\}.$$

При этом $X \dot{+} X = X^- \dot{+} X^+$.

Докажем, что следующие отображения:

$$\tilde{P}_-(t) : X^- \rightarrow \tilde{X}_-(t), \quad (6)$$

$$\tilde{P}_+(t) : X^+ \rightarrow \tilde{X}_+(t) \quad (7)$$

являются изоморфизмами.

Достаточно рассмотреть (6). Для отображения (7) доказательство аналогично. Покажем сначала, что ядро отображения (6) нулевое. Действительно, пусть при некотором t

$$\tilde{P}_-(t)(x, -x) = (P_-(t)x, -(I - P_-^*(t))x) = (0, 0)$$

или, что то же самое,

$$P_{-}(t)x = 0, \quad P_{-}^{*}(t)x = x.$$

Отсюда имеем

$$\langle x, x \rangle = \langle P_{-}^{*}(t)x, x \rangle = \langle x, P_{-}(t)x \rangle = 0,$$

т.е. $x = 0$. В последнем равенстве и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в X .

Осталось теперь показать, что при любом $t \in K$ справедливо равенство

$$\tilde{P}_{-}(t)X^{-} = \tilde{X}_{-}(t).$$

В предположении противного найдется такой ненулевой элемент $(z, u) \in \tilde{X}_{-}(t)$, который ортогонален пространству $\tilde{P}_{-}(t)X^{-}$. Это означает, что при любом $x \in X$ выполняется равенство

$$\langle P_{-}(t)x, z \rangle - \langle (I - P_{-}^{*}(t))x, u \rangle = 0,$$

из которого следует

$$P_{-}^{*}(t)z - (I - P_{-}(t))u = 0. \quad (8)$$

Кроме того, из включения $(z, u) \in \tilde{X}_{-}(t)$ непосредственно вытекают равенства

$$P_{-}(t)z = z, \quad (I - P_{-}^{*}(t))u = u. \quad (9)$$

Из последнего равенства следует, что $P_{-}^{*}(t)u = 0$, а из (8) путем умножения скалярно на $P_{-}^{*}(t)z$ получаем $P_{-}^{*}(t)z = 0$. Далее, из (9) вытекает

$$\langle z, z \rangle = \langle P_{-}^{*}(t)z, z \rangle = 0.$$

Значит, $z = 0$.

Наконец, из (8) следует равенство

$$P_{-}(t)u = u,$$

из которого с учетом того, что $P_{-}^{*}(t)u = 0$, получаем $u = 0$.

Итак, отображения (6) и (7) являются изоморфизмами. Эти изоморфизмы переводят любые базисы подпространств X^{-} и X^{+} в следящие базисы для семейств подпространств $\tilde{X}_{-}(t)$ и $\tilde{X}_{+}(t)$ соответственно. (Подвижный базис $\{e_{\alpha}(t)\}$ называется *следящим* для некоторого семейства подпространств $E(t)$, если $e_{\alpha}(t) \in E(t)$ для всех α и $t \in K$.)

Введем оператор

$$V(t) = \tilde{P}_{-}(t)P^{-} + \tilde{P}_{+}(t)P^{+},$$

где P^{-} – проектор пространства $X \dot{+} X$ на X^{-} , P^{+} – проектор пространства $X \dot{+} X$ на X^{+} .

Если гильбертово пространство X является вещественным, то оператор $V(t)$ также будет вещественным в силу вещественности проекторов Рисса (в этом случае, чтобы использовать проекторы Рисса, нужно рассматривать комплексификацию пространства).

Если оператор-функция $A(t)$ является периодической (почти периодической), то оператор-функция $V(t)$ будет периодической с тем же периодом (почти периодической), поскольку таковыми оператор-функциями являются соответствующие проекторы Рисса.

Условная (X^{-}, X^{+}) -приводимость оператора (4) вытекает теперь из леммы 6 в [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ следует из леммы и доказательства теоремы 2 в [1].

ЗАМЕЧАНИЕ. В [5] использовался приводящий оператор $V(t)$ такого же вида, как при доказательстве леммы. Чтобы установить в лемме условную (X_1, X_2) -приводимость, где $X_1 = \{(x, 0) : x \in X\}$, $X_2 = \{(0, x) : x \in X\}$, нужно в качестве оператора $V(t)$ взять прежний оператор, умноженный справа на оператор, имеющий матричное представление $\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}$ относительно разложения $X_1 \dot{+} X_2$.

ПРИМЕР. Рассмотрим пример из [3] при $d_1 = -1$, $d_2 = 1$, а именно, рассмотрим вещественную матрицу периода 1

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Как показано в [4], для этого примера не существует следящих базисов периода 1 для семейств подпространств $P_-(t)\mathbb{R}^2$ и $P_+(t)\mathbb{R}^2$, а значит, оператор-функция (10) не является условно приводимой. Этот факт установлен также в [3] другим способом.

Заметим, что для оператор-функции $\begin{pmatrix} -\cos(2\pi t) & \mu \sin(2\pi t) \\ \mu \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$ условия теоремы не выполняются при $\mu = 0$, $t = 1/4$.

Оператор-функция вида (4), где $A(t)$ задается формулой (10), в силу доказанной леммы условно приводима (этот результат следует также из [5]). В качестве следящих базисов периода 1 в подпространствах $\tilde{P}_-(t)\mathbb{R}^2$ и $\tilde{P}_+(t)\mathbb{R}^2$ можно взять соответственно

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix} \\ \sin(\pi t) & \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\pi t) & \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix} \\ \cos(\pi t) & \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\}$$

и

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin(\pi t) & \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} \\ \cos(\pi t) & \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & \begin{pmatrix} \sin(\pi t) \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix} \\ -\sin(\pi t) & \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\}$$

(см. выражения $P_{\mp}(t)$ для этого примера в [4]; в $\mathbb{R}^2$ берем элементы базиса $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курина Г. А., Мартыненко Г. В. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 212–217.
2. Аносов Д. В. // Матем. сб. 1960. Т. 50 (92). № 3. С. 299–334.
3. Sibuya Y. // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
4. Курина Г. А., Мартыненко Г. В. // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 688–695.
5. Азизов Т. Я., Кириакиди В. К., Курина Г. А. // Функцион. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 3. С. 73–75.
6. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.