Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Назирова, Об индексах дефекта сингулярных операторов нечетного порядка, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 792–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 05:41:55

ОБ ИНДЕКСАХ ДЕФЕКТА СИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Э. А. Назирова

Одной из основных задач спектральной теории линейных обыкновенных дифференциальных операторов является исследование их индексов дефекта в зависимости от поведения коэффициентов соответствующего дифференциального выражения ly . Такие задачи изучались М. А. Наймарком [1],

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 01-01-00996, 03-01-06079.

© Э. А. НАЗИРОВА 2003

М. В. Федорком [2], Я. Т. Султанаевым и другими авторами (см. библиографию в [2]). Как правило, ими рассматривались симметрические операторы с вещественными коэффициентами.

Для случая комплексных коэффициентов Федорюком были получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений (ФСР) уравнения $ly = 0$ при условии, что коэффициенты дифференциального выражения ly – полиномы с жестким ограничением на степень. Работа [3] посвящена исследованию симметрического дифференциального оператора $(2n + 1)$ -го порядка с комплекснозначными коэффициентами по нечетным степеням. Описаны классы дифференциальных операторов, имеющих индексы дефекта (m, m) , $1 \leq m \leq 2n - 1$. Работы [4], [5] также посвящены исследованию симметрических операторов в случае комплексных коэффициентов при выполнении условий регулярности типа Титчмарша–Левитана получены асимптотические формулы для ФСР уравнения $ly = \lambda y$, и в некоторых частных случаях исследованы индексы дефекта соответствующего минимального оператора.

Известно, что индексы дефекта определяют размерность пространств решений уравнений $lu = iy$ и $lu = -iy$. Целью настоящей работы является исследование индексов дефекта некоторого класса дифференциальных операторов, порожденных на полуоси самосопряженным дифференциальным выражением нечетного порядка с комплекснозначными коэффициентами.

Рассматривается уравнение вида

$$ly = (-1)^n 2iy^{(2n+1)} + \sum_{k=0}^n (-1)^k (p_{n-k}(x)y^{(k)})^{(k)} + i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j [(q_{n-j}(x)y^{(j)})^{(j+1)} + (q_{n-j}(x)y^{(j+1)})^{(j)}] = i\sigma y, \quad (1)$$

где $p_k(x)$, $k = 0, \dots, n$, $q_j(x)$, $j = 1, \dots, n$ – дважды непрерывно-дифференцируемые вещественнозначные функции, $x \in (0, \infty)$. Через L_0 обозначим минимальный дифференциальный оператор, порожденный в $L^2(0, \infty)$ выражением ly . Введем в рассмотрение

$$F(x, \sigma, \mu) = 2i(-1)^n \mu^{2n+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k p_{n-k}(x) \mu^{2k} + 2i \sum_{j=1}^n (-1)^j q_{n-j}(x) \mu^{2j-1} - i\sigma.$$

Обозначим корни этого многочлена через $\mu^1(x, \sigma), \dots, \mu^{2n+1}(x, \sigma)$. Пусть коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $|p_n(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$;
- 2) существует достаточно большое $R > 0$ такое, что для $x > R$ функции $p'_k(x)$, $q'_j(x)$ не меняют знак и $|p'_k(x)| = O(|p_k(x)|^{\alpha_k})$, $0 < \alpha_k < 1 + 1/(4n - 4k + 2)$, $k = 0, \dots, n$, $|q'_j(x)| = O(|q_j(x)|^{\beta_j})$, $0 < \beta_j < 1 + 1/(4n - 4j)$, $j = 1, \dots, n$;
- 3) для всех $i, j = 1, \dots, 2n + 1$ и $x > R$

$$0 < B \leq \left| \frac{\mu^i(x, \sigma)}{\mu^j(x, \sigma)} \right| \leq A,$$

где A, B – положительные постоянные;

- 4) для всех $x > R$ и $i \neq j$ $\operatorname{Re}(\mu^i(x, \sigma) - \mu^j(x, \sigma))$ не меняет знак.

Известно [4], что при выполнении данных условий, являющихся по сути условиями регулярности коэффициентов, уравнение (1) имеет $2n + 1$ линейно-независимых решений таких, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$y_k(x, \sigma) = \left(\frac{\partial F(x, \sigma, \mu^k)}{\partial \mu} \right)^{-1/2} \exp \left\{ \int_{x_0}^x \mu^k(t, \sigma) dt \right\}, \quad k = 1, \dots, 2n + 1. \quad (2)$$

В работе [4] показано, что индексы дефекта оператора L_0 суть $((2n + 2r + 1)/2, (2n + 2r + 1)/2)$, $r = 1, 3, 5, \dots, 2n + 1$, если интеграл

$$J = \int_{x_0}^{+\infty} p_n^{-\frac{2n}{2n+1}}(x) dx$$

сходится. Мы же рассмотрим случай, когда данный интеграл расходится.

Пусть коэффициенты дифференциального выражения ly раскладываются в асимптотические ряды по некоторой функции $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \phi^{\frac{2n-2k+1}{2n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i^k \phi^{-i\alpha_k}, \quad \alpha_k = \frac{mk}{s_k}, \quad m_k, s_k \in Z, \quad k = 0, \dots, n, \\ q_j(x) &= \phi^{\frac{2n-2j}{2n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{b}_i^j \phi^{-i\beta_j}, \quad \beta_j = \frac{l_j}{r_j}, \quad l_j, r_j \in Z, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\phi(x)$ такая, что $|\phi(x)| \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow \infty$. Введем параметр

$$\alpha = \frac{1}{N}, \quad N = \text{НОК}(2n+1, s_0, \dots, s_n, r_1, \dots, r_n). \quad (4)$$

Тогда ряды (3) можно переписать по степеням $\phi^\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \phi^{\frac{2n-2k+1}{2n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^k \phi^{-i\alpha}, \quad k = 0, \dots, n, \\ q_j(x) &= \phi^{\frac{2n-2j}{2n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j \phi^{-i\alpha}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5)$$

при этом часть коэффициентов a_i^k , b_i^j при $k \neq 0$, $j \neq 1$, $i \neq 0$ могут оказаться нулями. Предположим, что уравнение $F(x, \sigma, \mu) = 0$ не имеет кратных корней и будем искать решения этого уравнения в виде следующего ряда:

$$\mu(x, \sigma) = i\phi^{\frac{1}{2n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \phi^{-j\alpha}. \quad (6)$$

Разделим уравнение $F(x, \sigma, \mu) = 0$ на $\phi(x)$. Далее выпишем коэффициенты при нулевой степени $\phi(x)$:

$$Q(\mu_0) := 2\mu_0^{2n+1} + \sum_{k=0}^n a_0^k \mu_0^{2k} + \sum_{j=1}^n b_0^j \mu_0^{2j-1} = 0. \quad (7)$$

Следующий член в разложении функции $\mu(x, \sigma)$ получится при $\phi^{-\alpha}(x)$:

$$Q'(\mu_0)\mu_1 + R_1(\mu_0, a_1^0, \dots, a_1^n, b_1^1, \dots, b_1^n) = 0.$$

Так как мы предположили, что у многочлена $F(x, \sigma, \mu)$ нет кратных корней, то и уравнение (7) не имеет кратных корней, а значит, $Q'(\mu_0) \neq 0$. Тогда

$$\mu_1 = -\frac{R_1(\mu_0, a_1^0, \dots, a_1^n, b_1^1, \dots, b_1^n)}{Q'(\mu_0)}. \quad (8)$$

Здесь $R_1(\mu_0, a_1^0, \dots, a_1^n, b_1^1, \dots, b_1^n)$ – полином от $\mu_0, a_1^0, \dots, a_1^n, b_1^1, \dots, b_1^n$. Аналогично (8) можно выписать уравнения для нахождения следующих поправок:

$$\mu_j = -\frac{R_j(\mu_0, \dots, \mu_{j-1}, a_0^0, b_0^1, \dots, a_j^n, b_j^n)}{Q'(\mu_0)}. \quad (9)$$

Для μ_N получаем соотношение

$$\mu_N = -\frac{R_N(\mu_0, \dots, \mu_{N-1}, a_0^0, b_0^1, \dots, a_N^n, b_N^n)}{Q'(\mu_0)} + \frac{i\sigma}{Q'(\mu_0)}. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как функции $p_k(x), q_j(x)$ вещественнозначные, все коэффициенты рядов (5) также вещественные. Значит, если μ_0 – вещественный корень уравнения (7), то и выражения $R_1, \dots, R_N$ также вещественные.

Пользуясь разложениями (5), (6), нетрудно получить

$$\left(\frac{\partial F(x, \sigma, \mu_k)}{\partial \mu} \right)^{-1/2} \sim \text{const} \cdot \phi^{-\frac{2n}{4n+2}}(x).$$

В силу того, что $p_n(x) \sim a_0^n \phi(x)$ и интеграл J расходится, интеграл

$$\int_{x_0}^{+\infty} \phi_n^{-\frac{2n}{2n+1}}(x) dx$$

также расходится. Отсюда вытекает, что функции

$$\left(\frac{\partial F(x, \sigma, \mu_k)}{\partial \mu} \right)^{-1/2} \notin L^2(0, \infty).$$

Тогда из асимптотических формул (2) для ФСР уравнения (1) следует, что принадлежность решений $y_j(x, \sigma)$ пространству $L^2(0, \infty)$ будет определяться поведением функций $\text{Re}(\mu^k(x, \sigma))$, $k = 1, \dots, 2n + 1$,

$$\text{Re} \mu^k = \text{Re} \left(i \phi^{\frac{1}{2n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \phi^{-k\alpha} \right).$$

Пусть уравнение (7) имеет ровно $2r$ комплексных корней и $2n + 1 - 2r$ вещественных. Комплексные корни имеют вид

$$\mu^{2j-1, 2j} = \eta^j \pm i\nu^j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Таким образом, для $j = 1, \dots, r$

$$\text{Re} \mu^{2j-1, 2j}(x, \sigma) \sim \mp \nu^j \phi^{\frac{1}{2n+1}}(x).$$

Следовательно, ровно r решений, соответствующих корням характеристического уравнения с отрицательной в главном действительной частью, будут суммируемыми с квадратом на $L^2(0, \infty)$, и еще r решений не будут суммируемыми с квадратом. Рассмотрим теперь случай вещественных корней уравнения (7). В силу замечания 1

$$\text{Im}(\mu_1^k) = \text{Im}(\mu_2^k) = \dots = \text{Im}(\mu_{N-1}^k) = 0, \quad \text{Im}(\mu_N^k) = \frac{\sigma}{Q'(\mu_0)}, \quad k = 1, \dots, 2n + 1.$$

Докажем следующее несложное

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для всех $k = 2r + 1, \dots, 2n$ $Q'(\mu_0^k)Q'(\mu_0^{k+1}) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как числа μ_0^k – все различные вещественные корни уравнения (7), для любого $k = 2r + 1, \dots, 2n$ при переходе через точку μ_0^k функция Q меняет знак, а значит, в каждом отрезке (μ_0^k, μ_0^{k+1}) данная функция имеет точки локального экстремума, откуда в свою очередь следует, что производная меняет знак каждый раз при переходе через эти экстремумы, т.е. верно утверждение 1.

Таким образом, либо $n - r$, либо $n - r + 1$ решений $y_j(x, \sigma)$, соответствующих вещественным корням уравнения (7), суммируемы с квадратом на $(0, \infty)$. Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функции $p_k(x)$, $q_j(x)$ вещественнозначные, дважды непрерывно дифференцируемые и представимы в виде (5);
- 2) существует достаточно большое $R > 0$, что для $x > R$ функции $p'_k(x)$, $q'_j(x)$ не меняют знак и $|p'_k(x)| = O(|p_k(x)|^{\alpha_k})$, $0 < \alpha_k < 1 + 1/(4n - 4k + 2)$, $k = 0, \dots, n$, $|q'_j(x)| = O(|q_j(x)|^{\beta_j})$, $0 < \beta_j < 1 + 1/(4n - 4j)$, $j = 1, \dots, n$;
- 3) для всех $x \geq R$ и $i \neq j$ $\operatorname{Re}(\mu^i(x, \sigma) - \mu^j(x, \sigma))$ не меняют знак;
- 4) $|\phi(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$;
- 5) уравнение (7) не имеет кратных корней.

Тогда индексы дефекта оператора L_0 , порожденного на полуоси выражением ly , суть $(n, n+1)$ либо $(n+1, n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 2. Федорюк М. Ф. Асимптотические методы для линейных ОДУ. М.: Наука, 1983. 3. Ширикян Р. А. // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 11. С. 1942–1956. 4. Мукимов В. Р., Султанаев Я. Т. // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 2. С. 190–194. 5. Мукимов В. Р., Султанаев Я. Т. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 2083–2084.