Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Шумилова, Об усреднении задачи с двумя малыми параметрами в среде с двойной пористостью, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 796–799

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:48:02

ОБ УСРЕДНЕНИИ ЗАДАЧИ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В СРЕДЕ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

В. В. Шумилова

Усреднению задач, описывающих среды с двойной пористостью, посвящено много работ (см. [1] и литературу там). В данной работе для усреднения задачи с двумя малыми параметрами, описывающей среду с двойной пористостью, используется метод обобщенной двухмасштабной сходимости. Отметим, что метод обобщенной двухмасштабной сходимости, введенный В. В. Жиковым [2], применяется к усреднению задач, возникающих при рассмотрении тонких сингулярных структур.

1. Введем необходимые обозначения и определения. Пусть μ – периодическая борелевская мера на $\mathbb{R}^N$, $\Pi = [0, 1)^N$ – ячейка периодичности, $\mu(\Pi) = 1$, $\langle \cdot \rangle$ – среднее по мере μ . С мерой μ свяжем соболевское пространство $H_{\text{per}}^1(\Pi, d\mu)$, определяемое как совокупность первых компонент замыкания множества пар $\{u, \nabla u: u \in C_{\text{per}}^\infty(\Pi)\}$ в произведении $L^2(\Pi, d\mu) \times L^2(\Pi, d\mu)^N$. Вторую компоненту этого замыкания условимся называть *градиентом* u и обозначать ∇u . При таком определении градиент функции определен неоднозначно [1]–[3]. Эргодичность меры μ означает, что функция u есть константа, если она принадлежит $H_{\text{per}}^1(\Pi, d\mu)$ и имеет нулевой градиент. Для $a \in L^2(\Pi, d\mu)$, $b \in L^2(\Pi, d\mu)^N$ пишется $a = \operatorname{div} b$ (в смысле меры μ), если $\langle b \cdot \nabla \varphi \rangle = -\langle a \varphi \rangle$, $\varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\Pi)$. Введем пространство $V_{\text{pot}}(\Pi, d\mu)$ потенциальных векторов как замыкание множества $\{\nabla \varphi: \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\Pi)\}$ в $L^2(\Pi, d\mu)^N$. Вектор $b \in L^2(\Pi, d\mu)^N$ принадлежит пространству $V_{\text{sol}}(\Pi, d\mu)$ соленоидальных векторов, если $\langle b \cdot \nabla \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\Pi)$.

Пусть μ^h – семейство неотрицательных периодических нормированных мер на $\mathbb{R}^N$, слабо сходящихся к мере μ , $\mu^h \rightharpoonup \mu$ при $h \rightarrow 0$ и b^h – последовательность функций, ограниченных в пространстве $L^2(\Pi, d\mu^h)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00114.

Тогда *слабая сходимость* $b^h \rightharpoonup b$, $b \in L^2(\Pi, d\mu)$, означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Pi} b^h \varphi d\mu^h = \int_{\Pi} b \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\Pi).$$

Сильная сходимость $b^h \rightarrow b$, $b \in L^2(\Pi, d\mu)$, означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Pi} b^h z^h d\mu^h = \int_{\Pi} b z d\mu \quad \text{как только } z^h \rightarrow z.$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- 1) для меры μ выполнено неравенство Пуанкаре

$$\int_{\Pi} \varphi^2 d\mu \leq C \int_{\Pi} |\nabla \varphi|^2 d\mu, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^{\infty}(\Pi), \quad \langle \varphi \rangle = 0;$$

- 2) мера μ невырождена, т.е. не существует ненулевых постоянных потенциальных векторов;

- 3) выполнены два *аппроксимативных свойства*, связывающих меры μ и μ^h :

- (i) для любой функции $a \in C_{\text{per}}^{\infty}(\Pi)$, $\langle a \rangle = 0$, найдутся функция $a^h \in L^2(\Pi, d\mu^h)$ и вектор $b^h \in L^2(\Pi, d\mu^h)^N$ такие, что $\text{div } b^h = a^h$ (в смысле меры μ^h), $a^h \rightarrow a$, $b^h \rightarrow b$ в $L^2(\Pi, d\mu^h)$;

- (ii) для любого вектора $b \in V_{\text{sol}}(\Pi, d\mu)$ найдется вектор $b^h \in V_{\text{sol}}(\Pi, d\mu^h)$ такой, что $b^h \rightarrow b$ в $L^2(\Pi, d\mu^h)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аппроксимативные свойства (i), (ii) составляют основное отличие усреднения задач с двумя малыми параметрами от усреднения задач с одним малым параметром [2]. Доказательство этих свойств для различных сингулярных структур можно найти в [2], [4].

2. Введем меру μ_{ε} равенством

$$\mu_{\varepsilon}(B) = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1}B) \quad (1)$$

для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^N$. Затем при фиксированном $h > 0$ определяем скейлинг-меру μ_{ε}^h по формуле (1). После этого считаем, что $h = h(\varepsilon) \rightarrow 0$. Легко видеть, что μ_{ε}^h имеет период ε и слабо сходится к мере Лебега dx при любом $h(\varepsilon) \rightarrow 0$.

Пусть Ω – ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^N$ и $u_{\varepsilon, h}(x)$ – последовательность, ограниченная в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $u_{\varepsilon, h}(x)$ *слабо двумасштабно сходится* к функции $u(x, y) \in L^2(\Omega \times \Pi)$, $u_{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если для любых $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $b \in C_{\text{per}}^{\infty}(\Pi)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(x) b(\varepsilon^{-1}x) u_{\varepsilon, h}(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\Pi} \varphi(x) b(y) u(x, y) dx d\mu.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность $u_{\varepsilon, h}(x)$ *сильно двумасштабно сходится* к $u(x, y) \in L^2(\Omega \times \Pi)$, $u_{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_{\varepsilon, h} \nu_{\varepsilon, h}(x) d\mu_{\varepsilon}^h = \int_{\Omega} \int_{\Pi} u(x, y) \nu(x, y) dx d\mu,$$

как только $\nu_{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} \nu(x, y)$.

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_{\varepsilon,h}$ – последовательность из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $u_{\varepsilon,h}$, $\nabla u_{\varepsilon,h}$ ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$. Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x), \quad u(x) \in H_0^1(\Omega),$$

$$\nabla u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} \nabla u(x) + \nu(x, y), \quad \nu(x, y) \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}(\Pi, d\mu)).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u_{\varepsilon,h}$ – последовательность из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $u_{\varepsilon,h}$, $\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,h}(x)$ ограничены в $L^2(\Pi, d\mu_\varepsilon^h)$. Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} u(x, y), \quad u(x, y) \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1(\Pi, d\mu)),$$

$$\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,h}(x) \xrightarrow{2} \nabla_y u(x, y), \quad \nabla_y u(x, y) \in L^2(\Omega, V_{\text{pot}}(\Pi, d\mu)).$$

3. Перейдем к постановке задачи усреднения в некоторых моделях сред с двойной пористостью. Пусть μ и μ^h – описанные выше меры, удовлетворяющие условиям 1) и 3), $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ – объединение периодических μ -измеримых множеств, непересекающихся в том смысле, что $\exists E_i \in H_{\text{per}}^1(\Pi, d\mu)$, $\nabla E_i|_F = 0$, $E_i|_{F_j} = \delta_{ij}$ – символ Кронекера; $F^h = F_1^h \cup F_2^h \cup \dots \cup F_k^h$ – объединение соответствующих периодических μ^h -измеримых множеств.

Кроме того, предполагается, что меры $\mu|_{F_i}$ ($i = 1, \dots, k$) эргодичны и невырождены. На мягкую фазу $F_0 = \mathbb{R}^N \setminus F$ никаких условий не накладывается, кроме $\mu(F_0) > 0$.

Обозначим через $(F_i^h)^\varepsilon = \varepsilon F_i^h$ гомотетические сжатия множеств F_i^h . Тогда область Ω распадается на части: $\Omega_i^{\varepsilon,h} = \Omega \cap (F_i^h)^\varepsilon$ ($i = 1, \dots, k$) – жесткие фазы; $\Omega_0^{\varepsilon,h} = \Omega \cap (F_0^h)^\varepsilon$ – мягкая фаза.

Рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами

$$u_{\varepsilon,h} \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon^h), \quad -\operatorname{div}(A_\varepsilon^h \nabla u_{\varepsilon,h}) + u_{\varepsilon,h} = f_{\varepsilon,h}(x),$$

$$A_\varepsilon^h(x) = \begin{cases} A_i^h(\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \in (F_i^h)^\varepsilon, \quad i = 1, \dots, k, \\ \varepsilon^2 A_0^h(\varepsilon^{-1}x), & \text{если } x \in (F_0^h)^\varepsilon, \end{cases} \quad (2)$$

где правые части $f_{\varepsilon,h}$ ограничены в $L^2(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$, $A_i^h(y)$ – периодические борелевы матрицы ($i = 0, 1, \dots, k$), $A_i^h \rightarrow A_i$ в $L^2(\Pi, d\mu^h)$, $A_i(y)$ – μ -измеримые матрицы, удовлетворяющие условиям

$$a_i|\xi|^2 \leq A_i(y)\xi \cdot \xi \leq \alpha_i^{-1}|\xi|^2, \quad \alpha_i > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

По определению $u_{\varepsilon,h} \in H_0^1(\Omega, d\mu_\varepsilon^h)$ есть решение задачи (2), если

$$\sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i^{\varepsilon,h}} A_i^h(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_{\varepsilon,h} \cdot \nabla \varphi d\mu_\varepsilon^h + \varepsilon^2 \int_{\Omega_0^{\varepsilon,h}} A_0^h(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_{\varepsilon,h} \cdot \nabla \varphi d\mu_\varepsilon^h$$

$$+ \int_\Omega u_{\varepsilon,h} \varphi d\mu_\varepsilon^h = \int_\Omega f_{\varepsilon,h} \varphi d\mu_\varepsilon^h, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3)$$

Для рассматриваемой задачи опишем предельное уравнение.

Скажем, что функция $u(x, y)$ двух переменных $x \in \Omega$ и $y \in \Pi$ принадлежит классу V , если

$$u \in L^2(\Omega, H_{\text{per}}^1) \quad \text{и} \quad \nabla_y u|_F = 0, \quad u|_{F_j} = u_j(x) \in H_0^1(\Omega).$$

Заметим, что функцию $u(x, y) \in V$ можно записать в виде [1]:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^k u_i(x) E_i(y) + u_0(x, y), \quad u_i \in H_0^1(\Omega), \quad u_0 \in L^2(\Omega, X),$$

где $X = \{w \in H_{\text{per}}^1(\Pi, d\mu) : w|_F = \nabla_y w|_F = 0\}$.

Пусть A_i^{hom} – усредненные матрицы, соответствующие матрицам A_i :

$$A_i^{\text{hom}} \xi \cdot \xi = \inf_{\psi \in C_{\text{per}}^\infty(\Pi)} \int_{\Pi \cap F_i} A_i(\xi + \nabla \psi) \cdot (\xi + \nabla \psi) d\mu, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда предельная задача формулируется так: для данного $f(x, y) \in L^2(\Omega \times \Pi)$ найти $u \in V$ такую, что выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} A_i^{\text{hom}} \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i dx + \int_{\Omega} \int_{\Pi \cap F_0} A_0(y) \nabla_y u \cdot \nabla_y \varphi dx d\mu \\ + \int_{\Omega} \int_{\Pi} u \varphi dx d\mu = \int_{\Omega} \int_{\Pi} f \varphi dx d\mu, \quad \varphi \in V, \end{aligned} \quad (4)$$

в котором $\nabla_y u$ – некоторый градиент u .

Существование и единственность решения задачи (4) как пары $u, \nabla_y u$ следуют из теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

ТЕОРЕМА 3. Пусть правые части $f_{\varepsilon, h}$ в (2) слабо (сильно) двухмасштабно сходятся к $f(x, y) \in L^2(\Omega \times \Pi)$. Тогда последовательность решений $u_{\varepsilon, h}(x)$ задач (2) слабо (сильно) двухмасштабно сходится к решению $u(x, y)$ усредненной задачи (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (3) следует, что последовательность $u_{\varepsilon, h}$ ограничена в $L^2(\Omega, d\mu_{\varepsilon}^h)$. Без ограничения общности считаем, что $u_{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} u(x, y)$. Теоремы 1, 2 позволяют доказать, что $u(x, y)$ принадлежит классу V . Кроме того, из свойств двухмасштабной сходимости [2] следует, что $A_i^h(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_{\varepsilon, h}(x) \rightharpoonup A_i^{\text{hom}} \nabla u_i(x)$, $\varepsilon A_0^h(\varepsilon^{-1}x) \nabla u_{\varepsilon, h}(x) \xrightarrow{2} A_0(y) \nabla_y u(x, y)$.

Теперь в (3) подставим пробную функцию

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) E_i(y) + \alpha(x) w(y), \quad (5)$$

где $\alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$, $w \in X$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим, что $u(x, y)$ удовлетворяет тождеству (4) на пробных функциях (5). Так как линейная оболочка таких функций плотна в V [1], этого достаточно для того, чтобы $u(x, y)$ было решением предельной задачи.

Нетрудно также получить, что имеет место сильная двухмасштабная сходимость $u_{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} u(x, y)$, если только $f_{\varepsilon, h} \xrightarrow{2} f(x, y)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков В. В. // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
2. Жиков В. В. // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 81–148.
3. Жиков В. В. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.
4. Chechkin G. A., Jikov V. V., Lukkassen D., Piatnitski A. L. // Asymptotic Anal. 2002. V. 30. № 1. P. 61–80.