Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Вагина, М. М. Кипнис, Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 5, 786–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-

зумекает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:27:06

УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

М. Ю. Вагина, М. М. Кипнис

Введение. Проблема устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = - \sum_{k=1}^n a_k x(t - \tau_k) \quad (1)$$

сводится к проблеме расположения корней характеристического уравнения

$$p + \sum_{k=1}^n a_k e^{-p\tau_k} = 0. \quad (2)$$

В [1] дается следующее решение этой задачи для $n = 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ [1, Proposition 1.2.9]. Пусть $a_1, a_2, \tau_1, \tau_2 \in (0, \infty)$. Условие $a_1\tau_1 + a_2\tau_2 < 1$ является достаточным, а условие $a_1\tau_1 + a_2\tau_2 < \pi/2$ необходимым для того, чтобы все корни уравнения (2) имели отрицательные вещественные части.

Мы намерены показать, что достаточное условие утверждения можно ослабить до $a_1\tau_1 + a_2\tau_2 < \pi/2$ (теорема 1), а необходимое условие ошибочно (теорема 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Челябинского государственного педагогического университета, грант ГРГ55/02/Ц.

Аналогично уравнению (1) интегродифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = - \int_0^\infty a(\tau)x(t-\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $a(\tau) > 0$ при $\tau > 0$. И здесь для устойчивости нулевого решения в [1] указано достаточное условие $\int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau < 1$. Мы намерены ослабить это условие до $\int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau < \pi/2$.

1. Дифференциальное уравнение (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a_k, \tau_k \in (0, \infty)$, $1 \leq k \leq n$. Если $\sum_{k=1}^n a_k \tau_k < \pi/2$, то все корни уравнения (2) имеют отрицательные действительные части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(p) = p + \sum_{k=1}^n a_k e^{-p\tau_k}$. Рассмотрим движение переменной p по контуру K_R комплексной плоскости, содержащему отрезок $I_R: p = -i\omega$, $-R \leq \omega \leq R$, и полуокружность $C_R: p = Re^{-i\omega}$, $-\pi/2 \leq \omega \leq \pi/2$. По принципу аргумента для доказательства теоремы достаточно показать, что $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) = 0$ при движении p по K_R при достаточно больших R . Это будет означать отсутствие корней $\varphi(p)$ в правой полуплоскости. Очевидно, $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow \pi$ при движении p по C_R , если $R \rightarrow \infty$. Рассмотрим движение по отрезку $p = -i\omega$, $0 \leq \omega \leq R$. Обозначим

$$u(\omega) = \operatorname{Re} \varphi(-i\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega \tau_k, \quad v(\omega) = \operatorname{Im} \varphi(-i\omega) = -\omega + \sum_{k=1}^n a_k \sin \omega \tau_k. \quad (4)$$

Для завершения доказательства нам достаточно показать, что из условий $u(\omega) = 0$, $\omega > 0$ следует $v(\omega) < 0$, ибо тогда $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow -\pi/2$ при движении p по отрезку $p = -i\omega$, $0 \leq \omega \leq R$, $R \rightarrow \infty$ и вследствие симметрии $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow -\pi$ на I_R , а поэтому $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) = 0$ на K_R .

Пусть $u(\omega) = 0$. Вследствие элементарного неравенства $x + \cos x - (\pi/2) \sin x \geq 0$, $x \geq 0$, получим при $\omega > 0$

$$\omega \sum_{k=1}^n a_k \tau_k + \sum_{k=1}^n a_k \cos \omega \tau_k - \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{k=1}^n a_k \sin \omega \tau_k \geq 0.$$

Отсюда в силу (4), равенства $u(\omega) = 0$ и условия $\sum_{k=1}^n a_k \tau_k < \pi/2$ получим

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{k=1}^n a_k \sin \omega \tau_k \leq \omega \sum_{k=1}^n a_k \tau_k < \frac{\omega \pi}{2},$$

вследствие чего $v(\omega) < 0$. Теорема 1 доказана.

Поскольку для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t-\tau), \quad a, \tau \in (0, \infty),$$

устойчивость нарушается при $a\tau > \pi/2$ [2, гл. III, п. 3], легко показать, что постоянная $\pi/2$ в теореме 1 неулучшаема. Для этого следует положить в (1) $n = 2$, $a_1 = a_2$, $\tau_1 = \tau_2$. Тем не менее, следующая теорема 2 показывает, что нулевое решение уравнения (1) может быть устойчивым при сколь угодно большой величине $\sum_{k=1}^n a_k \tau_k$.

ТЕОРЕМА 2. Если $n = 2$, $a_1 = a_2$, и $a_1 \tau_1 < 1/2$, то при любом $\tau_2 \in (0, \infty)$ все корни уравнения (2) имеют отрицательные действительные части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях доказательства предыдущей теоремы ($n = 2$, $a_1 = a_2$) достаточно показать, что из $u(\omega) = 0$, $\omega > 0$ следует $v(\omega) < 0$. Действительно, пусть $u(\omega) = 0$. Тогда $\cos \omega \tau_2 = -\cos \omega \tau_1$, поэтому

$$|\sin \omega \tau_2| = \sqrt{1 - \cos \omega \tau_2} \sqrt{1 + \cos \omega \tau_2} \leq \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \omega \tau_1} = 2 |\sin(\omega \tau_1/2)|.$$

Вследствие этого

$$\begin{aligned} v(\omega) &= -\omega + a_1 (\sin \omega \tau_1 + \sin \omega \tau_2) \\ &\leq -\omega + a_1 \left(\sin \omega \tau_1 + 2 \left| \sin \left(\frac{\omega \tau_1}{2} \right) \right| \right) \leq -\omega + 2a_1 \omega \tau_1. \end{aligned}$$

Если $a_1 \tau_1 < 1/2$, то $v(\omega) < 0$. Теорема 2 доказана.

2. Интегродифференциальное уравнение (3). В уравнении (3) предполагается, что ядро $a(\tau)$ положительно, непрерывно в области $\tau \geq 0$ и $\int_0^\infty a(\tau) d\tau$ сходится. Начальные условия $x(t) = \phi(t)$, $-\infty < t \leq 0$, задаются непрерывной, ограниченной на $(-\infty, 0)$ функцией ϕ и гарантируют существование единственного решения $x(t)$, $t \in (0, \infty)$ [3, гл. I, п. 2]. Умножим обе части уравнения на функцию, равную 1 при $t \geq 0$ и равную 0 при $t < 0$, а затем применим преобразование Лапласа к обеим частям. Получим, что устойчивость нулевого решения зависит от расположения корней характеристического уравнения

$$p + \int_0^\infty a(\tau) e^{-p\tau} d\tau = 0. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau < \pi/2$, то все корни уравнения (5) имеют отрицательные действительные части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\varphi(p) = p + \int_0^\infty a(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

и рассмотрим движение переменной p по контуру K_R , описанному в доказательстве теоремы 1. Ввиду сходимости $\int_0^\infty a(\tau) d\tau$ при движении по C_R имеем $\Delta \operatorname{Arg} \varphi(p) \rightarrow \pi$ при $R \rightarrow \infty$, и, кроме того, $\varphi(0) > 0$.

Рассмотрим движение по отрезку $p = -i\omega$, $0 \leq \omega \leq R$. Обозначим

$$\begin{aligned} u(\omega) &= \operatorname{Re} \varphi(-i\omega) = \int_0^\infty a(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \\ v(\omega) &= \operatorname{Im} \varphi(-i\omega) = -\omega + \int_0^\infty a(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

И здесь, как в доказательстве теоремы 1, для завершения доказательства достаточно показать, что из условий $u(\omega) = 0$, $\omega > 0$ следует $v(\omega) < 0$. Пусть $u(\omega) = 0$, $\omega > 0$. Умножим обе части неравенства

$$\omega \tau + \cos \omega \tau - \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin \omega \tau \geq 0, \quad \omega \tau \geq 0,$$

на $a(\tau)$ и проинтегрируем по интервалу $[0, \infty)$. Получим

$$\omega \int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau + \int_0^\infty a(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \left(\frac{\pi}{2} \right) \int_0^\infty a(\tau) \sin \omega \tau d\tau \geq 0.$$

Отсюда в силу (6), равенства $u(\omega) = 0$ и условия $\int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau < \pi/2$ получим

$$\left(\frac{\pi}{2} \right) \int_0^\infty a(\tau) \sin \omega \tau d\tau \leq \omega \int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau < \frac{\omega \pi}{2},$$

вследствие чего $v(\omega) < 0$. Теорема 3 доказана.

Постоянная $\pi/2$ в теореме 3 неулучшаема. Однако для любого $M > 0$ можно подобрать такое ядро $a(\tau)$, что $\int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau > M$, но нулевое решение уравнения (3) устойчиво. Поэтому никакое ограничение сверху величины $\int_0^\infty \tau a(\tau) d\tau$ не является необходимым для устойчивости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics: Kluwer Academic Publishers, 1992. 2. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

Челябинский государственный педагогический университет
E-mail: mvagina@cspi.urs.ac.ru, kipnis@cspi.urs.ac.ru

Поступило
06.05.2002