Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Чеботарь, О решениях функциональных тождеств,
Матем. заметки, 2003, том 74, выпуск 6, 949–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 16:55:38

О РЕШЕНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВ

М. А. Чеботарь

Функциональные тождества степени 2 и обобщенные функциональные тождества степени 2 были исследованы в работах Брешара [1], [2]. Понятие функционального тождества произвольной степени было введено Бейдаром [3], а понятие обобщенного функционального тождества произвольной степени было введено автором [4].

С основными результатами теории функциональных тождеств, а также их приложениями можно ознакомиться в обзоре Брешара [5].

Мы будем использовать следующие обозначения (см. детали в [6], [7]):

R – первичное кольцо,

$Q_l(R)$, $Q_r(R)$ и $Q_s(R)$ – соответственно левое, правое и симметрическое мартиндейловские кольца частных для кольца R ,

$Q_{ml}(R)$ и $Q_{mr}(R)$ – соответственно левое и правое максимальные кольца частных для кольца R ,

C – расширенный центроид Мартиндейла кольца R ,

RC – центральное замыкание кольца R .

Пусть Q – некоторое кольцо и r – натуральное число. Для отображения $F: R^{r-1} \rightarrow Q$ и $1 \leq i \leq r$ определим отображение $F^i: R^r \rightarrow Q$, $1 \leq i \leq r$, по правилу

$$F^i(x_1, \dots, x_r) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r) \quad \text{для всех } x_1, \dots, x_r \in R.$$

Аналогично, для отображения $p: R^{r-2} \rightarrow Q$ и $1 \leq i < j \leq r$ мы определим отображение $p^{ij} = p^{ji}: R \rightarrow Q$ по правилу

$$p^{ij}(x_1, \dots, x_r) = p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_r).$$

Для удобства подразумевается, что отображение, определенное на R^0 , является константой из Q и отображение, определенное на R^{-1} , является нулевым. Мы будем также писать

$$F^i \quad \text{вместо} \quad F^i(x_1, \dots, x_r),$$

$$p^{ij} \quad \text{вместо} \quad p^{ij}(x_1, \dots, x_r),$$

$$F^i(x_k t) \quad \text{вместо} \quad F^i(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k t, x_{k+1}, \dots, x_r), \quad \text{где } 1 \leq k \leq r, \quad k \neq i,$$

(здесь $t \in Q$ – это такой элемент, что $Rt \subseteq R$).

Основными результатами этой работы являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m, r, n_j, j = 1, \dots, r$, – натуральные числа. Далее, пусть R – первичное кольцо, не удовлетворяющее нетривиальным обобщенным полиномиальным тождествам, $T \in \{R, RC\}$, и пусть $F: R^r \rightarrow T$ – такое отображение, что

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} p_{ji}^j(x_1, \dots, x_r) x_i a_i^j + \sum_{k=1}^m \lambda_k(x_1, \dots, x_r) b_k, \quad (1)$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in R$, где

$$\{a_1^j, \dots, a_{n_j}^j\}, \quad j = 1, \dots, r, \quad \{b_1, \dots, b_m\}$$

являются подмножествами R , состоящими из элементов линейно независимых над C ,

$$\begin{aligned} p_{ji}: R^{r-1} &\rightarrow Q_{mr}(R), & j = 1, \dots, r, & \quad i = 1, \dots, n_j, \\ \lambda_k: R^r &\rightarrow C, & k = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

– некоторые отображения. Тогда

$$p_{ji}: R^{r-1} \rightarrow Q_r(T), \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, n_j.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть r – натуральное число. Далее, пусть R – первичное кольцо, $T \in \{R, RC\}$, и пусть $F: R^r \rightarrow T$ – такое отображение, что

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^r p_i^i(x_1, \dots, x_r) x_i + \lambda(x_1, \dots, x_r) \quad (2)$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in R$, где

$$p_i: R^{r-1} \rightarrow Q_{mr}(R), \quad i = 1, \dots, r, \quad \lambda: R^r \rightarrow C$$

– некоторые отображения. Тогда либо

$$p_i: R^{r-1} \rightarrow Q_r(T), \quad i = 1, \dots, r,$$

либо каждый элемент кольца R является алгебраическим над C степени $\leq r$.

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 3. Пусть n – натуральное число, R – первичное кольцо, $T \in \{R, RC\}$ и $F: R \rightarrow T$ – отображение, заданное по правилу

$$F(x) = \sum_{i=1}^n a_i x b_i \quad \text{для всех } x \in R, \quad (3)$$

где $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, \dots, b_n\}$ являются подмножествами $Q_{mr}(R)$, состоящими из элементов, линейно независимых над C . Тогда $a_i \in Q_r(T)$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $b_i \in Q_l(T)$ для всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $j, 1 \leq j \leq n$. По [6, теорема 2.3.3] существуют $\alpha_k, \beta_k \in R, k = 1, \dots, m$, такие, что

$$b = \sum_{k=1}^m \alpha_k b_j \beta_k \neq 0, \quad \sum_{k=1}^m \alpha_k b_i \beta_k = 0 \quad \text{для всех } i \neq j.$$

Из (3) следует, что

$$\sum_{k=1}^m F(x \alpha_k) \beta_k = a_j x b \in T$$

для всех $x \in R$. Так как $b \neq 0$, существует такой элемент $a \in R$, что $0 \neq ba \in R$. Таким образом, $a_j x b a u \in T$ для всех $x \in R, u \in R$ и $a_j \in Q_r(T)$ по определению. Аналогично доказывается, что $b_i \in Q_l(T)$ для всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем, что $p_{11}: R^{r-1} \rightarrow Q_r(T)$. Для остальных отображений результат будет следовать при соответствующей перестановке индексов в (1).

Индукция по m . Пусть $m = 0$, т.е. вторая сумма в (1) нулевая.

Индукция по r . При $r = 1$ все следует из леммы 3.

Пусть $r > 1$. Из (1) мы получаем

$$\begin{aligned} F(x_r a_{n_r}^r y) - F y a_{n_r}^r &= \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{i=1}^{n_j} [p_{ji}^j(x_r a_{n_r}^r y) x_i a_i^j - p_{ji}^j x_i a_i^j y a_{n_r}^r] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_r-1} p_{ri}^r x_r (a_{n_r}^r y a_i^r - a_i^r y a_{n_r}^r) \in T \end{aligned} \quad (4)$$

для всех $x_1, \dots, x_r, y \in R$.

По [6, лемма 6.1.8] существует такой элемент $y \in R$, что

$$\begin{aligned} \{a_1^j, \dots, a_{n_j}^j, a_1^j y a_{n_r}^r, \dots, a_{n_j}^j y a_{n_r}^r\}, \quad j = 1, \dots, r-1, \\ \{(a_{n_r}^r y a_1^r - a_1^r y a_{n_r}^r), \dots, (a_{n_r}^r y a_{(n_r-1)}^r - a_{(n_r-1)}^r y a_{n_r}^r)\} \end{aligned}$$

являются подмножествами R , состоящими из элементов, линейно независимых над C . Индукция по n_r , примененная к (4), завершает доказательство этого случая.

Пусть $m > 0$. Из (1) мы получаем

$$\begin{aligned} F y b_m y - b_m y F y &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} [p_{ji}^j x_i a_i^j y b_m y - b_m y p_{ji}^j x_i a_i^j y] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i (b_i y b_m y - b_m y b_i y) \in T \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $x_1, \dots, x_r, y \in R$. По [6, лемма 6.1.8] существует такой элемент $y \in R$, что

$$\begin{aligned} \{a_1^j y b_m y, \dots, a_{n_j}^j y b_m y, a_1^j y, \dots, a_{n_j}^j y\}, \quad j = 1, \dots, r, \\ \{(b_1 y b_m y - b_m y b_1 y), \dots, (b_{m-1} y b_m y - b_m y b_{m-1} y)\} \end{aligned}$$

являются подмножествами R , состоящими из элементов, линейно независимых над C .

Применяя индуктивное предположение по m к (5) получаем, что $p_{11}: R^{r-1} \rightarrow Q_r(T)$. Доказательство завершено.

Аналогичным образом доказывается

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m, r, n_j, j = 1, \dots, r$, — натуральные числа. Далее, пусть R — первичное кольцо, не удовлетворяющее нетривиальным обобщенным полиномиальным тождествам, $T \in \{R, RC\}$, и пусть $F: R^r \rightarrow T$ — такое отображение, что

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} a_i^j x_i p_{ji}^j(x_1, \dots, x_r) + \sum_{k=1}^m \lambda_k(x_1, \dots, x_r) b_k$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in R$, где

$$\{a_1^j, \dots, a_{n_j}^j\}, \quad j = 1, \dots, r, \quad \{b_1, \dots, b_m\}$$

являются подмножествами R , состоящими из элементов, линейно независимых над C ,

$$\begin{aligned} p_{ji}: R^{r-1} &\rightarrow Q_{mr}(R), \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, n_j, \\ \lambda_k: R^r &\rightarrow C, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

— некоторые отображения. Тогда

$$p_{ji}: R^{r-1} \rightarrow Q_l(T), \quad j = 1, \dots, r, \quad i = 1, \dots, n_j.$$

Следствие 5, являющееся основным результатом работы [8], вытекает из [9], теоремы 1 и теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $r, n_i, m_i, i = 1, \dots, r$, – натуральные числа. Далее, пусть R – первичное кольцо, $T \in \{R, RC\}$, V – конечномерное подпространство линейного пространства $Q_{mr}(R)$ над C , и пусть $E_{ji}, F_{lk}: R^{r-1} \rightarrow T$ – отображения такие, что

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} E_{ji}^j(x_1, \dots, x_r) x_j a_i^j + \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{m_l} b_k^l x_l F_{lk}^l(x_1, \dots, x_r) \in V$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in R$, где

$$\{a_1^j, \dots, a_{n_j}^j\}, \quad \{b_1^j, \dots, b_{m_j}^j\}, \quad j = 1, \dots, r,$$

являются подмножествами R , состоящими из элементов, линейно независимых над C . Тогда выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений:

- (i) R – кольцо, удовлетворяющее нетривиальным обобщенным полиномиальным тождествам;
- (ii) существуют и единственны отображения $p_{jilk}: R^{r-2} \rightarrow Q_s(T)$ и $\lambda_{ilk}: R^{r-1} \rightarrow C$ такие, что

$$E_{ji}^j = \sum_{\substack{1 \leq l \leq r \\ l \neq j}} \sum_{k=1}^{m_l} b_k^l x_l p_{jilk}^{jl} + \sum_{k=1}^{m_j} \lambda_{ijk}^j b_k^j,$$

$$F_{lk}^l = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq l}} \sum_{i=1}^{n_j} p_{jilk}^{jl} x_i a_i^j - \sum_{i=1}^{n_l} \lambda_{ilk}^l a_i^l;$$

в частности,

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n_j} E_{ji}^j x_j a_i^j + \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{m_l} b_k^l x_l F_{lk}^l = 0;$$

более того, если все отображения E_{ji} и F_{lk} аддитивны по каждому из аргументов, то то же самое справедливо для отображений p_{jilk} и λ_{ilk} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем, что $p_1: R^{r-1} \rightarrow Q_r(T)$. Для остальных отображений результат будет следовать при соответствующей перестановке индексов в (2).

Пусть $t \in R$ – элемент степени $> r$ над C .

Индукция по r . Пусть $r = 1$. Из (2) получаем, что

$$[F, t] = Ft - tF = p_1^1 x_1 t - t p_1^1 x_1 \in R,$$

и требуемый результат следует из леммы 3.

Пусть $r > 1$. Из (2) получаем, что

$$G_1 = [F, t] = Ft - tF = \sum_{i=1}^r p_i^i x_i t - \sum_{i=1}^r t p_i^i x_i$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in R$.

Положим $G_k = G_k t - G_k(x_k t)$, $k = 2, \dots, r$. Имеем

$$G_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i t^i p_1^1 x_1 t^{r-i} \in R$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in R$.

По лемме 3 $p_1: R^{r-1} \rightarrow Q_r(T)$. Доказательство завершено.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 6. Пусть r – натуральное число. Далее, пусть R – первичное кольцо, $T \in \{R, RC\}$, и пусть $F: R^r \rightarrow T$ – такое отображение, что

$$F(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^r x_i p_i^i(x_1, \dots, x_r) + \lambda(x_1, \dots, x_r)$$

для всех $x_1, \dots, x_r \in R$, где $p_i: R^{r-1} \rightarrow Q_{mr}(R)$, $i = 1, \dots, r$, и $\lambda: R^r \rightarrow C$ – некоторые отображения. Тогда либо $p_i: R^{r-1} \rightarrow Q_l(T)$, $i = 1, \dots, r$, либо каждый элемент кольца R является алгебраическим над C степени $\leq r$.

Следствие 7 вытекает из [3], теоремы 2 и теоремы 6.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть R – первичное кольцо, $T \in \{R, RC\}$ и r – натуральное число. Пусть $E_i, F_i: R^{r-1} \rightarrow T$, $i = 1, \dots, r$, – произвольные отображения. Положим

$$\pi(x_1, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^r E_i^i(x_1, \dots, x_r) x_i + \sum_{j=1}^r x_j F_j^j(x_1, \dots, x_r).$$

(а) Если $\pi(x_1, \dots, x_r) \in C$ для всех $x_1, \dots, x_r \in R$, тогда выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений:

- (i) каждый элемент кольца R является алгебраическим над C степени $\leq r$;
- (ii) $\pi(x_1, \dots, x_r) = 0$ для всех $x_1, \dots, x_r \in R$.

(б) Если $\pi(x_1, \dots, x_r) = 0$ для всех $x_1, \dots, x_r \in R$, тогда выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений:

- (iii) каждый элемент кольца R является алгебраическим над C степени $\leq r-1$;
- (iv) существуют и единственны отображения $p_{ij}: R^{r-2} \rightarrow Q_s(T)$ и $\lambda_i: R \rightarrow C$ такие, что

$$E_i^i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ j \neq i}} x_j p_{ij}^{ij} + \lambda_i^i, \quad F_j^j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq j}} -p_{ij}^{ij} x_i - \lambda_j^j;$$

более того, если все отображения E_i и F_j аддитивны по каждому из аргументов, то то же самое справедливо для отображений p_{ij} и λ_i .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brešar M. // J. Algebra. 1995. V. 172. P. 764–786.
2. Brešar M. // J. Algebra. 1995. V. 172. P. 690–720.
3. Beidar K. I. // Comm. Algebra. 1998. V. 26. P. 1819–1850.
4. Chebotar M. A. // J. Algebra. 1998. V. 202. P. 655–670.
5. Brešar M. // Contemporary Math. 2000. V. 259. P. 93–109.
6. Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. New York: Marcel Dekker, Inc., 1996.
7. Martindale W. S. // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 576–584.
8. Yu W. // Comm. Algebra. 2002. V. 30. P. 2897–2913.
9. Beidar K. I., Brešar M., Chebotar M. A. // J. Algebra. 1999. V. 215. P. 644–665.