Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Л. Сабинина, Об одной проблеме теории гладких луп,
Матем. заметки, 2003, том 74, выпуск 6, 947–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 03:51:43

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ГЛАДКИХ ЛУП

Л. Л. Сабинина

Эта статья посвящается Л. В. Сабинину к его семидесятилетию.

Геодезические лупы были введены Киккавой [1] и независимо Сабининым [2]. Это понятие можно также найти в [3, гл. 1] и [4]. Грубо говоря, *геодезическая лупа* – это пространство аффинной

Работа выполнена при поддержке PROMEP-SEP.

© Л. Л. САБИНИНА 2003

связности (M, ∇) , наделенное локально бинарной операцией в точке p по следующей формуле:

$$u \cdot_p v = \text{Exp}_u \circ \tau_{p,u} \circ \text{Exp}_p^{-1}(v), \quad (1)$$

где $\text{Exp}_p^{-1}: M \rightarrow T_p(M)$ – экспоненциальное отображение, а $\tau_{p,u}$ – параллельный перенос из точки p в точку u вдоль геодезической. Левые и правые трансляции этой бинарной операции являются гладкими локальными диффеоморфизмами, а точка p – нейтральным элементом. Следовательно, бинарная операция (1) определяет локальную гладкую лупу. Легко видеть, что геодезическая лупа моноассоциативна, т.е. каждый элемент лупы порождает локальную подгруппу (геометрически геодезическую дугу) в лупе.

Естественным образом возникает вопрос, который был предложен в книге [3] Акивисом: *может ли произвольная гладкая моноассоциативная лупа быть реализована как геодезическая лупа некоторого пространства аффинной связности.*

Изучая соответствия между геометрическими свойствами пространства аффинной связности (M, ∇) и алгебраическими свойствами геодезической лупы этого пространства, Сабинин ввел понятие геодезического одуля. Геодезическая лупа со скалярным произведением $u \rightarrow t_{pu}$ является геодезическим одулем (см. [4]), и при этом выполнено следующее условие: скалярное произведение t_{pu} задает уравнение геодезической, которая проходит через точки p и u , где u – это точка в некоторой нормальной окрестности N_p точки p , а t – скалярный параметр.

Этот аппарат позволил Сабинину получить более полную информацию о структуре геодезических луп в разных точках пространства M . В частности, им были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы одуль мог быть реализован как геодезический одуль некоторого пространства аффинной связности. Используя результаты работ [5], [4] по теории одулей и формулируя в эквивалентной форме для луп *условие геометричности* для одуля, мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Гладкая локальная моноассоциативная лупа может быть реализована как геодезическая лупа некоторого пространства аффинной связности тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

$$l_{x,a}(a^n) = (l_{x,a}a)^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где $l_{x,a} = L_{x \cdot y}^{-1} \circ L_x \circ L_a$ и $L_a b = a \cdot b$.

В частности, гладкая локальная моноассоциативная лупа с левым A -свойством ($l_{x,a}$ являются автоморфизмами лупы) может быть реализована как геодезическая лупа; а также гладкая локальная правая моноальтернативная лупа (т.е. лупа, в которой выполнено соотношение $(x \cdot y^m) \cdot y^n = x \cdot y^{m+n}$) может быть реализована как геодезическая лупа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют моноассоциативные лупы, не обладающие свойством геометричности (формула (2)). Например, функция двух комплексных переменных

$$f(x, y) = \frac{-xy + 3x + 3y - 1}{3\bar{x}y - \bar{x} - y + 3} \quad \text{для } |x| < 1, \quad |y| < 1$$

определяет операцию такой лупы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kikkawa M. // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. 1964. V. 28. P. 199–207. 2. Сабинин Л. В. // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 5. С. 800–803. 3. Aquivis M. A., Goldberg V. V. Differential Geometry of Webs // Handbook of Differential Geometry / ed. F. J. E. Dillen and L. C. A. Verstraelen. North-Holland, 2000. P. 1–152. 4. Sabinin L. V. Smooth Quasigroups and Loops: Kluwer Academic Press, 1999. 5. Сабинин Л. В. // Докл. АН СССР. 1995. Т. 344. № 6. С. 745–748.

UAEM (Morelos, México)

E-mail: liudmila@servm.fc.uaem.mx

Поступило

06.03.2003