Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Коломейкина, Н. Г. Мощевитин, О невозвращаемости в среднем сумм вдоль последовательности Кронекера, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 140–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 11:58:34

О НЕВОЗВРАЩАЕМОСТИ В СРЕДНЕМ СУММ ВДОЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КРОНЕКЕРА

Е. В. Коломейкина, Н. Г. Мошевитин

Последовательностью Кронекера называется последовательность

$$(\{\alpha_1 k\}, \dots, \{\alpha_s k\}), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}.$$

Пусть $s = 1$ и $F(x_1)$ – абсолютно непрерывная вещественнозначная функция, периодичная по вещественной переменной x_1 с периодом единица и с нулевым средним значением $\int_0^1 F(x_1) dx_1 = 0$. В [1] доказано, что если α_1 иррационально, то

$$\liminf_{q \rightarrow +\infty} \sup_{\varphi_1} \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1) \right| = 0.$$

Отметим, что несколько ранее в [2], [3] подобный результат получен в предположении дважды дифференцируемости F . Отметим также, что согласно Г. Вейлю при всяком s для гладкой функции $F(x_1, \dots, x_s)$, периодичной (с периодом 1) по каждому из аргументов и со средним значением равным нулю в случае, когда числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ линейно независимы вместе с единицей над полем рациональных чисел, выполняется

$$\sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_s} \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s) \right| = o(q), \quad q \rightarrow +\infty.$$

В [4], [5] доказано, что при всяком s для гладкой функции $F(x_1, \dots, x_s)$, периодичной по каждому из аргументов и со средним значением равным нулю в случае, когда числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ линейно независимы вместе с единицей над полем рациональных чисел, для каждой фиксированной начальной фазы $(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$ выполняется

$$\liminf_{q \rightarrow +\infty} \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s) \right| < +\infty$$

(на самом деле, конструкция доказательства из работ [4], [5] позволяет иметь этот результат при $F \in C^m(\mathbb{T}^s)$, $m = e^{\gamma s \log s}$; по поводу этой задачи см. также [6]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00912 и № 00-15-96109, и фонда INTAS.

С другой стороны, в работе [7] доказано, что для произвольной функции $F(x_1, \dots, x_s)$, $s \geq 2$, у которой все коэффициенты Фурье $F_{m_1, \dots, m_s}$, кроме коэффициента $F_{0, \dots, 0}$, отличны от нуля и для любой положительнозначной функции $\lambda(y) = o(y)$, $y \rightarrow +\infty$, найдется набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, линейно независимых вместе с единицей над полем рациональных чисел, такой, что

$$\sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_s} \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s) \right| \geq \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s) \right|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_s \right)^{1/2} > \lambda(q)$$

при всех достаточно больших q .

В настоящей заметке мы уточняем этот последний результат и находим необходимые и достаточные условия на множество

$$\text{спес } F = \{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : F_{m_1, \dots, m_s} \neq 0\},$$

обеспечивающие наличие оценки снизу на среднее по начальным фазам, типа процитированного результата из [7].

ТЕОРЕМА. Пусть $s \geq 2$, периодическая функция F принадлежит классу C^1 и

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 F(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = 0.$$

Рассмотрим следующие два условия:

- (А) для любой положительнозначной функции $\lambda(y) = o(y)$, $y \rightarrow +\infty$, найдется набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, линейно независимых вместе с единицей над полем рациональных чисел, такой, что

$$\left(\int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{q-1} F(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s) \right|^2 d\varphi_1 \dots d\varphi_s \right)^{1/2} > \lambda(q)$$

при всех достаточно больших q ;

- (В) найдется положительное R и ненулевая целая точка $(p_1, \dots, p_s) \in \mathbb{Z}^s$ такие, что $\text{спес } F \subset \mathcal{B}(R) \cup \mathcal{L}(p)$, где $\mathcal{B}(R)$ обозначает шар с центром в нуле радиуса R , а $\mathcal{L}(p)$ обозначает прямую, проходящую через начало координат и точку p .

Тогда условие (А) эквивалентно отрицанию условия (В).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть выполнено условие (В). Тогда

$$F(x_1, \dots, x_s) = G(x_1, \dots, x_s) + H(p_1 x_1 + \dots + p_s x_s),$$

где $G(x_1, \dots, x_s)$ – тригонометрический полином, $H(y)$ – периодическая функция одной переменной y . Теперь (см. [1], [2]) легко подобрать последовательность натуральных чисел q_ν так, чтобы

$$\sup_y \left| \sum_{k=0}^{q_\nu-1} H((p_1 \alpha_1 + \dots + p_s \alpha_s)k + y) \right|$$

стремился к нулю и чтобы последовательность точек $(\{\alpha_1 q_\nu\}, \dots, \{\alpha_s q_\nu\})$, $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$, стремилась к точке $(0, \dots, 0)$ по модулю 1. Поскольку G является тригонометрическим полиномом, величина

$$\sup_{\varphi_1, \dots, \varphi_s} \left| \sum_{k=0}^{q_\nu-1} G(\alpha_1 k + \varphi_1, \dots, \alpha_s k + \varphi_s) \right|$$

Сформулированная лемма позволяет построить последовательность множеств Ω_ν , каждое из которых задается соотношениями

$$\begin{aligned} & |m_{\nu+1,0} + m_{\nu+1,1}\omega_1 + \cdots + m_{\nu+1,s}\omega_s| \leqslant \mu_{1,\nu}, \\ & |m_{\nu+s-1,0} + m_{\nu+s-1,1}\omega_1 + \cdots + m_{\nu+s-1,s}\omega_s| \leqslant \mu_{s-1,\nu}, \\ & |m_{\nu+s,0} + m_{\nu+s,1}\omega_1 + \cdots + m_{\nu+s,s}\omega_s| \leqslant \mu(M_{\nu+s+1}) \end{aligned}$$

и которые вложены друг в друга: $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \dots$, а также последовательность шаров $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \mathcal{B}_3 \supset \dots$, $\mathcal{B}_\nu \subset \Omega_\nu$. Ясно, что можно считать $\mu_{j,\nu} \leq \mu(M_{\nu+j+1})$. Пересечение последовательности вложенных замкнутых множеств $\mathcal{B}_\nu$ содержит некоторую точку $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$.

Добиться линейной независимости над $\mathbb{Z}$ ее компонент вместе с единицей можно следующим образом. Множество всех плоскостей вида $m_0 + m_1\omega_1 + \dots + m_s\omega_s$, $\max_{j=1, \dots, s} |m_j| \leq M_s$, состоит из конечного количества пучков параллельных плоскостей и, стало быть, в лемме каждый раз можно выбирать шар $\mathcal{B}$, не пересекающийся ни с одной из этих плоскостей. Ясно, что предельная точка в этом случае будет иметь линейно независимые вместе с единицей компоненты.

Подведем итог. Мы построили набор линейно независимых вместе с единицей чисел $\omega_1, \dots, \omega_s$ так, что в множестве $\text{спес } F$ имеется последовательность точек $m_\nu = (m_{\nu,1}, \dots, m_{\nu,s})$, для которой выполняется

$$\|m_{\nu,1}\omega_1 + \cdots + m_{\nu,s}\omega_s\| \leq \mu(M_{\nu+1}).$$

В [7] показано, что из наличия такого свойства вытекает условие (A) (доказательство использует равенство Парсеваля).

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров Е. А. // УМН. 1979. Т. 34. № 6. С. 184–188. 2. Козлов В. В. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1978. № 1. С. 106–115. 3. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: МГУ, 1980. 4. Мошевитин Н. Г. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 5. С. 737–748. 5. Moshchevitin N. G. // Algebraic Number Theory and Diophantine Analysis. Proc. Int. Conf. Graz (Austria). Berlin–New York: Walter de Gruyter, 2000. P. 311–329. 6. Конягин С. В. // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 569–577. 7. Мошевитин Н. Г. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 3. С. 394–410. 8. Khinchin A. Ya. // Rendiconti Circ. Math. Palermo. 1926. V. 50. P. 170–195. 9. Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Мир, 1961.