Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, И. Купш, Асимптотическая декогерентность в бесконечномерных квантовых системах с квадратическими гамильтонианами, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 143–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:43:25

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЕКОГЕРЕНТНОСТЬ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ С КВАДРАТИЧЕСКИМИ ГАМИЛЬТониАНАМИ

И. Купш, О. Г. Смолянов

Рассматривается эволюция квантовых систем с квадратическими гамильтонианами в представлении Винера–Сигала–Фока; полученные результаты используются для исследования возникновения декогерентности в открытых квантовых системах (так называются подсистемы некоторых других квантовых систем), т.е. превращения их чистых состояний в смешанные. При этом рассматриваются модели, аналогичные введенным в [1]–[3].

Исследование процесса возникновения декогерентности представляет интерес, с одной стороны, для квантовой теории информации, и, с другой стороны, для оснований квантовой механики, в частности, для описания того, как классическая динамика может быть получена из квантовой.

© И. Купш, О. Г. Смолянов 2003

В ряде мест изложение носит формальный характер, и некоторые аналитические предположения опускаются.

1. Асимптотическая декогерентность в открытых квантовых системах. Все рассматриваемые векторные пространства считаются вещественными или комплексными. Если H и K гильбертовы пространства, то $\mathcal{L}(H, K)$ – это множество всех плотно определенных линейных отображений из H в K ; $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H, H)$; символ $\mathcal{A}(H)$ обозначает векторное пространство всех ограниченных самосопряженных операторов из $\mathcal{L}(H)$, $\mathcal{L}_1(H)$ – множество всех ядерных операторов из $\mathcal{L}(H)$, $\mathcal{L}_1^a(H) = \mathcal{L}_1(H) \cap \mathcal{A}(H)$, $\mathcal{L}_1^+(H)$ – конус положительных операторов из $\mathcal{L}_1^a(H)$, $\mathcal{P}(H)$ – множество всех ортогональных проекторов в H .

Элементы пространства $\mathcal{A}(H)$ называются *наблюдаемыми*, а элементы конуса $\mathcal{L}_1^+(H)$ – (*смешанными*) *состояниями* квантовой системы с гильбертовым пространством H . Состояние S называется *декогерентным* относительно наблюдаемой A , если операторы A и S коммутируют (тогда измерение A не меняет S). Пусть $P: \sigma(\mathbb{R}^1) \rightarrow \mathcal{P}(H)$ – σ -аддитивная мера (предполагается, что пространство $\mathcal{P}(H)$ наделено топологией сильной сходимости и символом $\sigma(\mathbb{R}^1)$ обозначается σ -алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^1$), причем множество $P(\Delta_1)(H)$ ортогонально $P(\Delta_2)(H)$, если $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

Пусть τ_1 – локально выпуклая топология в $\mathcal{A}(H)$ (соответственно τ_2 – локально выпуклая топология в $\mathcal{L}_1^+(H)$) и пусть $f: \mathcal{A}(H) \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{A}(H)$ (соответственно $g: \mathcal{L}_1^+(H) \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}_1^+(H)$) – отображение, описывающее эволюцию наблюдаемых (соответственно, состояний) квантовой системы, причем $f(A, 0) = A$ и $g(S, 0) = S$ для всех $A \in \mathcal{A}(H)$ и $S \in \mathcal{L}_1^+(H)$. Пусть

$$\mathcal{A}_P = \{A \in \mathcal{A}(H) : P(\Delta_1)f(A, t)P(\Delta_2) \rightarrow 0 \quad \text{в } \tau_1,$$

если $\text{dist}(\Delta_1, \Delta_2) > 0\}$, и

$$\mathcal{L}_P = \{S \in \mathcal{L}_1^+(H) : P(\Delta_1)f(S, t)P(\Delta_2) \rightarrow 0 \quad \text{в } \tau_2,$$

если $\text{dist}(\Delta_1, \Delta_2) > 0\}$.

Если $\mathcal{A}_P = \mathcal{A}(H)$ (соответственно, если $\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_1^+(H)$), то мы говорим, что мера P определяет τ_1 -асимптотические правила суперотбора для наблюдаемых (соответственно, для состояний). В каждом из этих случаев подпространства $P(\Delta)(H)$ называются τ_j -асимптотическими секторами суперотбора. Если P является спектральным разложением самосопряженного оператора A в H , то говорят о τ_j -асимптотических правилах суперотбора, определяемых A .

ПРИМЕР 1 (унитарная динамика замкнутой системы). Пусть $H_1 = \mathcal{L}_2(0, \infty)$, $H_2 = \mathbb{C}_n$, $H = H_1 \oplus H_2$, причем мера P определяется равенствами $P\{0\}(H) = H_1$, $P\{1\}(H) = H_2$. Пусть A_1 – самосопряженный оператор в H_1 , определяемый равенством $(A_1 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $A_2 \in \mathcal{A}(H_2)$, $A_j \neq 0$, $A = A_1 \oplus A_2$, $f(A_0, t) = e^{-itA} A_0 e^{itA}$ для всякого $A_0 \in \mathcal{A}(H)$. Пусть τ_w – слабая операторная топология. Тогда P определяет τ_w -асимптотические правила суперотбора для наблюдаемых и для состояний. Действительно, если $A_0 \in \mathcal{A}(H)$, $\psi \in H_1$, $a = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, где (e_j) – ортонормированный базис в H_2 , то в естественных обозначениях

$$\begin{aligned} f(A_0, t)\psi, a) &= (e^{itA} \psi, A_0 e^{itA} a) = \int e^{it\lambda} \psi(\lambda) (P^{H_1} A_0 e^{itA_2} a)(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \int e^{it\lambda} \psi(\lambda) (P^{H_1} A_0 e_j)(\lambda) d\lambda \rightarrow 0 \end{aligned}$$

в силу леммы Римана–Лебега. Если $\dim H_2 = \infty$, то, пользуясь аналогичными аргументами, можно доказать, что P определяет τ_w -асимптотические правила суперотбора для состояний, но не для наблюдаемых.

2. Преобразования Боголюбова. Далее мы пользуемся определениями, введенными в [4]. Предполагается, что $(\mathcal{E}, I)$ – это симплектическое пространство, порожденное некоторым комплексным гильбертовым пространством; поэтому мы будем писать $\mathcal{E} = Q_H \times P_H$, где $Q_H = H_R^r$, $P_H = iH_R^r$ (при этом Q_H и P_H рассматриваются как копии одного и того же гильбертова пространства). Символом $\text{Sp } \mathcal{E}$ обозначается группа всех непрерывных линейных симплектических преобразований пространства $(\mathcal{E}, I)$; таким образом, $A \in \text{Sp } \mathcal{E}$ в точности тогда, когда существуют непрерывные $\alpha \in \mathcal{L}(Q_H, Q_H)$, $\beta \in \mathcal{L}(P_H, Q_H)$, $\gamma \in \mathcal{L}(Q_H, P_H)$, $\delta \in \mathcal{L}(P_H, P_H)$ такие, что, для каждого $z = (q, p) \in \mathcal{E}$ $Az = (\alpha q + \beta p, \gamma q + \delta p)$ и $\alpha\delta^* - \beta\gamma^* = \text{Id}$, $\gamma^*\alpha = \alpha^*\gamma$, $\delta^*\beta = \beta^*\delta$; при этом мы пишем $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ (предполагается, что P_H' отождествлено с Q_H и $Q_H^i - с P_H$). Можно показать [4], [5], что всякое симплектическое преобразование пространства $Q_H \times P_H$ можно разложить в произведение преобразований $(K, 0, 0, K^{-1})$, $(\text{Id}, \beta, 0, \text{Id})$ и $(Pr_J, Pr_N, -Pr_N, Pr_J)$ или в произведение преобразований $(K, 0, 0, K^{-1})$, $(\text{Id}, 0, \gamma, \text{Id})$ и $(Pr_J, Pr_N, -Pr_N, Pr_J)$, где Pr_J и Pr_N – ортопроекторы, дающие ортогональное разложение пространства $Q_H (= J \oplus N)$ и аналогичное ортогональное разложение P_H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если Φ – представление канонических коммутационных соотношений (ККС) в E [4], $\ker \Phi = \{0\}$, $A \in \text{Sp } \mathcal{E}$, то преобразование $A_\Phi: \Phi(\text{Sp } \mathcal{E}) \rightarrow \Phi(\text{Sp } \mathcal{E})$, определяемое равенством $A_\Phi = \Phi A \Phi^{-1}$, называется *преобразованием Боголюбова*, порождаемым A и Φ (если $A = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, то $A_\Phi(\Phi((q, p))) = \Phi(\alpha q + \beta p, \gamma q + \delta p)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Φ_1, Φ_2 – представления ККС соответственно в гильбертовых пространствах E_1 и E_2 . Всякий изоморфизм $V: E_1 \rightarrow E_2$ такой, что $V^{-1}\Phi_2(x)V = A_{\Phi_1}\Phi_1(x)$ для всякого $x \in \mathcal{E}$, называется (*унитарным*) *обобщенным преобразованием Боголюбова*, порождаемым симплектическим преобразованием A и представлениями Φ_1 и Φ_2 (в E_1 и E_2). Если $E_1 = E_2$ и $\Phi_1 = \Phi_2$, то преобразование V называется (*унитарным*) *преобразованием Боголюбова* (далее мы обычно не описываем явно преобразование A , представления Φ_1, Φ_2 и пространства E_1, E_2).

3. Квантование квадратичных гамильтонианов по Винеру–Сигалу–Фоку. *Гамильтоновой системой* называется набор $(\mathcal{E}, I, \mathcal{H})$, где $(\mathcal{E}, I)$ – симплектическое пространство и $\mathcal{H}$ – числовая функция на $\mathcal{E}$, называемая *функцией Гамильтона*. Пусть $\mathcal{H}$ – квадратичная функция, определяемая для всякого $z = (q, p) \in Q_H \times P_H$ равенством

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2}((A_{QQ}^2 q, q) + 2(A_{QP} q, p) + (A_{PP}^2 p, p)),$$

где $A_{QQ} \in \mathcal{L}(Q_H, Q_H)$, $A_{QP} \in \mathcal{L}(Q_H, P_H)$, $A_{PP} \in \mathcal{L}(P_H, P_H)$; при этом предполагается, что A_{QQ} и A_{PP} – неотрицательные самосопряженные операторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Дифференциальный оператор в пространстве $\mathcal{F}(Q_H)$* числовых функций с символом Вейля $\mathcal{H}$ и оператором сдвига нулевого уровня энергии $C(= C^*)$ – это отображение $\widehat{\mathcal{H}}$ векторного подпространства $\text{dom } \widehat{\mathcal{H}}$ пространства $\mathcal{F}(Q_H)$ в себя, определяемое, для каждого ортонормированного базиса $(e_j) \subset Q_H$, для которого все последующие выражения корректно определены, равенством

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}\varphi(q) = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} ((A_{QQ} e_j, e_j)(A_{QQ} e_j, e_j)\varphi - \varphi''(A_{PP} e_j, A_{PP} e_j) + (C e_j, e_j)\varphi \\ & - 2i(A_{QP} e_j, e_j)(\varphi'_j e_j) - i(A_{QP} e_j, e_j)\varphi); \end{aligned}$$

мы используем здесь естественные обозначения и предполагаем, что правая часть не зависит от выбора базиса (подходящий выбор оператора C соответствует “нормальному упорядочению”). Три первых члена в правой части определяют дифференциальный оператор, который будет обозначаться символом $\widehat{\mathcal{H}}^0$. Если $\nu - P_H$ -цилиндрическая мера в Q_H , то оператор $\widehat{\mathcal{H}}_\nu$ в $\mathcal{L}_2(Q_H, \nu)$ определяется с помощью равенства

$$\widehat{\mathcal{H}}_\nu f = \widehat{\mathcal{H}}(f\Phi_\nu^{1/2})\Phi_\nu^{-1/2},$$

где Φ_ν – обобщенная плотность [4] меры ν .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\ker A_{PP} = \ker A_{QQ} = \{0\}$ и ν_0 – гауссовская P_H -цилиндрическая мера на Q_H с корреляционным оператором B , удовлетворяющим соотношению

$$B^{-1} = M = A_{PP}^{-1} \sqrt{A_{PP} A_{QQ}^2 A_{PP}} A_{PP}^{-1}.$$

Тогда $\widehat{\mathcal{H}}^0 \nu_0 = 0$; при этом говорят, что мера ν_0 определяет основное состояние для $\widehat{\mathcal{H}}^0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если $\nu^{1/2} = \nu_0$ (это значит, что обобщенные плотности этих мер связаны аналогичным соотношением) и $C = M$, то оператор $\mathcal{H}_\nu$ в $\mathcal{L}_2(Q_H, \nu)$ называется квантованием Винера–Сигала–Фока (ВСФ) гамильтониана $\mathcal{H}$, а $\mathcal{L}_2(Q_H, \nu)$ – пространством ВСФ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\widehat{\mathcal{H}}_\nu$ – ВСФ-квантование гамильтониана $\mathcal{H}$, то

$$\widehat{\mathcal{H}}_\nu f = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-A_{PP}^2 f'' + 2A_{PP} M q \otimes A_{PP} f' + 2(A_{QP}^* q \otimes f') - 2i(A_{QP}^* q \otimes M q) f - iA_{QP} f).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\ker A_{QQ} = Q_0 \neq 0$, $\dim Q_0 < \infty$; $Q_H = Q_0 \oplus Q_0^\perp$ (где $Q_0^\perp$ – ортогональное дополнение к Q_0 в Q), M_1 – сужение M на $Q_0^\perp$ (это пространство инвариантно относительно M) и ν_1 – P_H -цилиндрическая мера на Q_H , являющаяся произведением меры Лебега на Q_0 и гауссовской меры на $Q_0^\perp$, корреляционный оператор которой определяется равенством $B_1^{-1} = M_1$. Тогда $\widehat{\mathcal{H}}^0 \nu_1 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если $\nu^{1/2} = \nu_1$ и $C = A_{PP} M$, то оператор $\widehat{\mathcal{H}}_{\nu_1}$ в $\mathcal{L}_2(Q, \nu)$ называется обобщенным ВСФ-квантованием гамильтониана $\mathcal{H}$.

Аналог предложения 2 справедлив и для обобщенного ВСФ-квантования.

Оператор в $\mathcal{L}_2(Q_H, \nu)$, определенный равенством

$$Df = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-f'' + 2Mq \otimes f')$$

называется диагональным. Ниже рассматриваются методы приведения к диагональной форме дифференциальных операторов, полученных ВСФ-квантованием. При этом предполагается, что Φ – это представление Шрёдингера [4], а ν и ν_1 – меры из определения 5.

Пусть D_ν – дифференциальный оператор в $\mathcal{L}_2(Q_H, \nu)$, определяемый равенством

$$D_\nu f = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-A^2 f'' + 2Mq \otimes f'),$$

где A – строго положительный самосопряженный оператор в Q , и для каждого $K \in \mathcal{L}(Q_H)$ символ νK^{-1} обозначает образ меры ν относительно K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $K \in \mathcal{L}(Q_H)$,

$$\operatorname{Im} K \subset \operatorname{dom} M^{1/2}, \quad \operatorname{Im} K^{-1} \subset \operatorname{dom} M^{-1/2}, \quad \operatorname{Im} K^{*-1} \subset \operatorname{dom} M^{1/2}, \quad \operatorname{Im} K^{-1} \subset \operatorname{dom} A,$$

то отображение $V_K: \mathcal{L}_2(Q_H, \nu) \rightarrow \mathcal{L}_2(Q_H, \nu K)$, $f(\cdot) \mapsto f(K^{-1} \cdot)$ корректно определено и унитарно, причем, если $f \in \mathcal{L}_2(Q_H, \nu K)$, то

$$V_K D_\nu V_K^{-1} f = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-A_1 A_1^* f'' + 2M^{1/2} K q \otimes M^{1/2} K^{-1*} f'),$$

где $A_1 = AK^{-1}$ (отображение V_K является обобщенным преобразованием Боголюбова, порождаемым симплектическим отображением $(K, 0, 0, K^{*-1})$, представлением Шрёдингера в пространстве $\mathcal{L}_2(Q, \nu)$ и его образом относительно отображения K^{-1} в пространстве $\mathcal{L}_2(Q, \nu K)$; отметим, что корреляционный оператор B_K меры νK определяется равенством $B_K = K^{-1} B K^{-1*}$).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $K = A$, то

$$V_K D_\nu V_K^{-1} f = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-f'' + 2M^{1/2} K q \otimes M^{1/2} K^{-1} f').$$

Если $A = \operatorname{Id}$ и K – ортогональное преобразование, то

$$D_\nu^V f \equiv V_K D_\nu V_K^{-1} f = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-f'' + 2M^{1/2} K q \otimes M^{1/2} K f').$$

Если меры νK и ν эквивалентны, т.е. если K представимо в виде $I + F$, где F – оператор Гильберта–Шмидта, то

$$\frac{d\nu K}{d\nu}(q) = e^{-(M^{1/2} K q, M^{1/2} K q) + (M q, q)}.$$

При этом отображение

$$P: \mathcal{L}_2(Q, \nu K) \rightarrow \mathcal{L}_2(Q, \nu), \quad \varphi \mapsto \sqrt{\frac{d\nu K}{d\nu}} \varphi$$

является изоморфизмом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Справедливо равенство (оператор D_ν^V определен в следствии 1)

$$P D_\nu^V P^{-1} f = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-f'' + 2M^{1/2} q \otimes M^{1/2} f') + \frac{1}{2} f \operatorname{tr}(K^* M^2 K q \otimes q - M^2 q \otimes q).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Согласно известной теореме Шейла представления Шрёдингера в $\mathcal{L}_2(Q, \nu)$ и в $\mathcal{L}_2(Q, \nu K)$ унитарно эквивалентны в точности тогда, когда K представимо в форме $K = I + F$ с оператором Гильберта–Шмидта F .

Пусть $\bar{\nu}_1$ – мера на P_H , являющаяся произведением меры Лебега на образе P_0 подпространства Q_0 при изоморфизме, отождествляющем Q_H и P_H , и гауссовской меры с корреляционным оператором M на ортогональном дополнении подпространства P_0 в P ; пусть еще мера $\bar{\nu}$ определяется равенством $\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}^{1/2}$. Обозначим через F_W изоморфизм пространства $\mathcal{L}_2(Q_H, \nu)$ на $\mathcal{L}_2(P_H, \bar{\nu})$, определяемый для подходящих функций $f \in \mathcal{L}_2(Q_H, \nu)$ равенством

$$F_W(f)(p) = c e^{(\bar{B}_1 q, q)} \int e^{i(p, x)} f(x) \nu_1(dx),$$

где $c > 0$ и $\bar{B}_1 \in \mathcal{L}(P)$ определяется так: $\bar{B}_1|_{P_0^\perp} = B_1$; $\bar{B}_1|_{P_0} = 0$ (символ $|$ означает “сужение на”). Если ν_1 – стандартная гауссова мера ($P_0 = \{0\}$ и $B_1 = \operatorname{Id}$), то F_W называется преобразованием Фурье–Винера; в общем случае его можно назвать обобщенным преобразованием Фурье–Винера. Если $\dim P_H (= \dim Q_H) < \infty$ и $P_0 = P_H$, то F_W – это обычное преобразование Фурье (в этом случае $c^{-1} = (2\pi)^{n/2}$, $n = \dim P_0$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $A_{QQ} = M^2$, $A_{QP} = 0$, $A_{PP} = \operatorname{Id}$. Тогда $F_W \widehat{\mathcal{H}}_\nu F_W^{-1} f = \widehat{\mathcal{H}}_\nu$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\gamma_k: [0, \infty) \times Q_H \rightarrow \mathbb{C}$ ($k \in H$) определяется равенством

$$\gamma_k(t, q) = \exp\left((e^{-iMt} k, q) - \frac{1}{4}(A^2 M^{-1} e^{-2iMt} k, k)\right).$$

Тогда γ_k – решение задачи Коши на $(0, \infty)$ для уравнения

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-A^2 f'' + 2M^{1/2} q \otimes M^{1/2} f')$$

с начальными условиями $(0, f_0)$, где $f_0(q) = \gamma_k(0, q)$.

4. Некоторые модели с асимптотической декогерентностью. Пусть симплектическое пространство (E, I) является произведением двух симплектических пространств (E^s, I^s) и (E^e, I^e) , причем пространство (E^s, I^s) двумерно, $E^s = Q^s \times P^s$ и оператор I^s определяется стандартным образом, а пространство (E^e, I^e) совпадает с рассматривавшимся выше пространством $(\mathcal{E}, I)$, порожденным некоторым бесконечномерным комплексным гильбертовым пространством H . Пространство (E^s, I^s) интерпретируется как классическое пространство состояний исследуемой подсистемы, а пространство (E^e, I^e) – как классическое пространство ее окружения. Функция Гамильтона $\mathcal{H}$ на (E, I) определяется в естественных обозначениях равенством $\mathcal{H}(q_s, p_s, z_e) = p_s^2 + \omega^2 q_s^2 + (M z_e, z_e)_H + p_s(h, z_e)$ (здесь M – самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве H). Рассматривается квантовая система, получающаяся применением к системе $(E, I, \mathcal{H})$ обобщенного квантования ВСФ.

ТЕОРЕМА 2. *Каково бы ни было ω , существуют такие оператор M и вектор $h \in H$, для которых оператор $\hat{p}_s$ в $\mathcal{L}_2(Q^s)$ определяет τ_1 -асимптотические правила суперотбора для наблюдаемых (соответственно, τ_2 -асимптотические правила суперотбора для состояний), где τ_1 – сильная топология в пространстве $\mathcal{A}(\mathcal{L}_2(Q^s))$ (соответственно, τ_2 – топология в пространстве $\mathcal{L}_1^+(\mathcal{L}_2(Q^s))$, определяемая операторной нормой).*

Доказательство теоремы основано на приведении квантового гамильтониана к диагональной форме с помощью унитарных преобразований Боголюбова и получении явной формулы, описывающей редуцированную динамику подсистемы, путем решения (с помощью теоремы 1) соответствующего уравнения Шрёдингера, с последующим применением операции взятия частичного следа. При этом оказывается необходимым, чтобы оператор M обладал непрерывным спектром, “в достаточной мере” сконцентрированным вблизи нуля, т.е. чтобы имела место “инфракрасная расходимость” (ср. [1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kupsch J. // J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 5945–5953.
2. Giulini D., Joos E., Kiefer C., Kupsch J., Stamatescu I.-O., Zeh H. D. Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory: Springer, 2001.
3. Kupsch J. Mathematical Aspects of Decoherence. Decoherence: Theoretical, Experimental and Conceptual Problems: Springer, 2000.
4. Купш И., Смолянов О. Г. // Матем. заметки. 2000. Т. 68. №3. С. 409–414.
5. Купш И., Смолянов О. Г. // Докл. РАН. 2000. Т. 371. №1. С. 21–25.