Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Рютин, Непрерывность операторов обобщенного рационального приближения в пространстве $L_1[0; 1]$, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 148–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:56:59

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО РАЦИОНАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_1[0; 1]$

К. С. Рютин

1. Введение. Пусть X – линейное нормированное пространство и $A \subset X$. Отображение $\Phi: X \rightarrow A$ называется (мультипликативной) ε -выборкой, если для любого $x \in X$ выполнено неравенство $\|\Phi(x) - x\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x, A)$, где $\varepsilon > 0$ и $\rho(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

В работе [1] доказано отсутствие при малом $\varepsilon > 0$ непрерывной мультипликативной ε -выборки из $L_p[0; 1]$, $1 < p < \infty$, на множество $R_{m,n}$, $n \geq 1$ (алгебраические рациональные функции). Аналог этого результата (при $0 < p < 1$) был получен в [2], там же была построена непрерывная мультипликативная ε -выборка (для большого ε) на множества обобщенных рациональных функций в пространствах $L_p[0; 1]$, $0 < p < \infty$. Наша цель – доказать, что при малых $\varepsilon > 0$ не бывает непрерывных мультипликативных ε -выборок на обобщенные дроби в пространстве $L_1[0; 1]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-96109 и № 02-01-00248.

© К. С. Рютин 2003

Пусть V – подпространство в $L_1[0; 1]$, а W – подпространство в $C[0; 1]$. Определим множество обобщенных рациональных функций, отвечающих паре (V, W) следующим образом:

$$R_{V,W} = \text{Cl} \left\{ r(\tau) = \frac{v(\tau)}{w(\tau)} : v \in V, w \in W, \min_{\tau \in [0;1]} w(\tau) > 0 \right\},$$

где Cl обозначает замыкание в $L_1[0; 1]$. Для непустоты $R_{V,W}$ надо потребовать существования положительной функции в W .

Если L – линейная оболочка ET -системы (см. [3, с. 58]) на $[0; 1]$ и $\dim L = k$, $k \in \mathbb{N}$, то мы будем называть ее ET_{k-1} -пространством. Отметим, что $L \subset C^{k-1}[0; 1]$. Сформулируем условия, которым должны удовлетворять V, W :

- 1) V – подпространство в $L_1[0; 1]$, $1 \leq \dim V < \infty$;
- 2) W – ET_{n-1} -пространство, $n \geq 3$.

Заметим, что найдется функция $w_0 \in W$ такая, что $w_0(\tau) > 0$ на $[0; 1]$ (см. [3, теорема 1.4, с. 58]). Кроме того, можно считать, что W содержит константы. В самом деле, от пары подпространств (V, W) можно перейти к паре $(\tilde{V}, \tilde{W})$, где $\tilde{W} = \frac{1}{w_0}W$, $\tilde{V} = \frac{1}{w_0}V$. Для пары $(\tilde{V}, \tilde{W})$ будут по-прежнему выполнены условия 1 и 2. Введем следующее обозначение:

$$W^+ = \{w \in W : w(\tau) \geq 0 \text{ на } [0; 1]\}.$$

Заметим, что для всякой функции $r \in R_{V,W}$ можно подобрать пару $v \in V$, $w \in W^+$ такую, что почти всюду на $[0; 1]$ справедливо равенство $r(\tau) = v(\tau)/w(\tau)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для пары (V, W) выполнены условия 1), 2). Тогда существует число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(V, W) > 0$ такое, что для любой непрерывной мультипликативной ε -выборки $\Phi: L_1[0; 1] \rightarrow R_{V,W}$ выполняется неравенство $\varepsilon \geq \varepsilon_0$.

На W есть равномерная норма, которую будем обозначать через $\| \cdot \|_C$, обычную L_1 -норму обозначаем $\| \cdot \|$. Для сокращения записи будем иногда писать R вместо $R_{V,W}$. Всюду в работе через $I(m)$ обозначено множество $\{1, \dots, m\}$, где $m \in \mathbb{N}$, окрестность точки $\tau \in [0; 1]$ – отрезок с центром в точке τ и $\Delta = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, \text{ и } \forall j \lambda_j \geq 0\}$ – “стандартный” симплекс.

2. Доказательство теоремы 1. Докажем несколько вспомогательных утверждений. Зафиксируем $v \in V$, $v \neq 0$; тогда найдутся число $d = d(v) \in (0; 1)$ и измеримое множество $T = T(v) \subset [d/10; 1 - d/10]$ такие, что $\mu(T) = d$ и $v(\tau) \neq 0$ на T .

ЛЕММА 1. Пусть пара (V, W) удовлетворяет всем условиям 1), 2). Тогда для любого $\delta > 0$ и п.в. точек $\tilde{\tau} \in T$ можно подобрать функцию $r(\tau) \in R_{V,W}$ и окрестность U точки $\tilde{\tau}$ такие, что выполнены неравенства

$$\mu(U) \leq \delta, \quad \int_U |r(\tau)| d\tau = 1, \quad \int_{[0;1]} |r(\tau)| d\tau \leq 1 + \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L(v)$ – множество точек Лебега функции $v(\tau)$. Известно [4, с. 41], что $\mu(L(v)) = 1$. Следовательно, для множества $A := T \cap L(v)$ выполнено соотношение $\mu(A) = \mu(T) = d$.

Возьмем произвольную точку $\tilde{\tau} \in A$. Так как W – чебышевское подпространство и $\dim W \geq 3$, то [3, теорема 1.3, с. 57] для любой точки $\tilde{\tau} \in (0; 1)$ найдется функция $w \in W^+$, у которой на $[0; 1]$ есть единственный нуль $\tilde{\tau}$. Отметим, что функция $v(\tau)/w(\tau)$ имеет неинтегрируемую особенность в точке $\tilde{\tau}$. При подходящем выборе параметров $M, \kappa > 0$ функция $r(\tau) = Mv(\tau)/(\kappa + w(\tau))$ будет обладать такими свойствами:

$$\int_{[-\delta_1 + \tilde{\tau}; \tilde{\tau} + \delta_1]} |r(\tau)| d\tau = 1, \quad \int_{[0;1]} |r(\tau)| d\tau \leq 1 + \delta, \quad \text{где } \delta_1 \in \left(0; \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{d}{20}\right\}\right).$$

Отметим, что из наших построений следует включение $[-\delta_1 + \tilde{\tau}; \tilde{\tau} + \delta_1] \subset [0; 1]$. Лемма 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых $N \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ можно подобрать точки $\tau_1, \dots, \tau_N \in T$, функции $e_1(\tau) \dots e_N(\tau) \in R_{V,W}$ и окрестности $U_1, \dots, U_N$ точек $\tau_1, \dots, \tau_N$ такие, что при любом $j \in I(N)$ выполнены неравенства

$$\min_{i \neq j} |\tau_i - \tau_j| \geq \frac{d}{3N}, \quad \mu(U_j) \leq \delta, \quad \int_{U_j} |e_j(\tau)| d\tau = 1, \quad \int_{[0;1]} |e_j(\tau)| d\tau \leq 1 + \delta.$$

ЛЕММА 2. Пусть пара (V, W) удовлетворяет условиям 1), 2). Пусть заданы $h > 0$, $K > n/2$ и различные точки $\tau_j \in (0; 1)$, $j \in I(K)$. Тогда для любого $C > 0$ существует $\delta > 0$ для которого выполняется следующее: если $r(\tau) \in R_{V,W}$, U_j – окрестности точек τ_j , $j \in I(K)$ и при этом для всякого $j \in I(K)$ справедливы неравенства $\mu(U_j) \leq \delta$ и $\int_{U_j} |r(\tau)| d\tau \geq h$, то $\int_{[0;1]} |r(\tau)| d\tau \geq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы не выполняется. Тогда существует число $C > 0$ такое, что для любого $\delta_q = 1/q$, $q \in \mathbb{N}$, найдутся $r_q \in R$ и окрестности U_{jq} точек τ_j , $j \in I(K)$ такие, что при всех $q \in \mathbb{N}$, $j \in I(K)$ справедливы неравенства

$$\mu(U_{jq}) \leq \delta_q, \quad \int_{U_{jq}} |r_q(\tau)| d\tau \geq h, \quad \int_{[0;1]} |r_q(\tau)| d\tau \leq C.$$

Можно считать, что $r_q = v_q/w_q$, где $w_q \in W^+$, $\|w_q\|_C = 1$. Зафиксируем число $a > 0$ и окрестности $O_j = [-a + \tau_j; \tau_j + a] \subset [0; 1]$ точек τ_j , $j \in I(K)$, такие, что $O_i \cap O_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть

$$W(\delta) := \left\{ w \in W : \|w\|_C = 1, \quad w \in W^+, \quad \max_{j \in I(K)} \min_{\tau \in O_j} |w(\tau)| \leq \delta \right\}.$$

Заметим, что найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что $W(\delta_0) = \emptyset$. Если это не так, то существует функция $\tilde{w} \in W^+$, $\|\tilde{w}\|_C = 1$, у которой не менее K нулей на $[0; 1]$. Последнее противоречит [3, теорема 1.2, с. 55]. Перейдя, если это необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что существует индекс $j_0 \in I(K)$ такой, что для всех $q \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $w_q(\tau) \geq \delta_0$ при $\tau \in O_{j_0}$. Проведем необходимые оценки:

$$h \leq \int_{U_{j_0q}} \frac{|v_q(\tau)|}{w_q(\tau)} d\tau \leq \frac{1}{\delta_0} \int_{U_{j_0q}} |v_q(\tau)| d\tau \quad \text{и} \quad C \geq \int_{O_{j_0}} \frac{|v_q(\tau)|}{w_q(\tau)} d\tau \geq \int_{O_{j_0}} |v_q(\tau)| d\tau;$$

мы воспользовались тем, что $\|w_q\|_C = 1$. Но написанные неравенства противоречивы при достаточно большом q . Лемма доказана.

Введем обозначения

$$F(\tau, a) := [0; 1] \setminus [\tau - a; \tau + a],$$

где $a \in (0; 1/10)$, а $\tau \in [2a; 1 - 2a]$ и $S(W) = \{w \in W^+ : \|w\| = 1\}$.

ЛЕММА 3. Пусть заданы ET_{n-1} -пространство W ($n \geq 3$) и число $a \in (0; 1/10)$. Тогда существуют числа $\delta_0 = \delta_0(a, W) > 0$ и $k = k(a, W) > 0$ такие, что для любых $\tau_0 \in [2a; 1 - 2a]$, $\theta > 0$ и $w \in S(W)$, для которых выполнено соотношение $w(\tau_0) \leq k\theta$, можно подобрать функцию $f \in W^+$ со следующими свойствами: $f(\tau) \geq w(\tau)$ на $U = [\tau_0 - \delta_0; \tau_0 + \delta_0]$, и $f(\tau) \leq \theta w(\tau)$ на $F = F(\tau_0, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\min_{w \in S(W)} \max_{f \in Z(w)} f(\tau_0) = z > 0,$$

где $Z(w) := \{f \in W^+ : f(\tau) \leq w(\tau) \text{ на } F\}$. Если предположить что $z = 0$, то найдется функция $w_0 \in S(W)$ такая, что $w_0(\tau_0) = 0$ и для любой $f \in Z(w_0)$ выполнено $f(\tau_0) = 0$. Построим функцию $f_1(\tau) \in W^+$, у которой будут такие же нули с теми же кратностями, что и у w_0 , но $f_1(\tau_0) \neq 0$. Заметим, что порядок нуля у функции w_0 в точке τ_0 – четное число. Легко видеть, что при некотором $c > 0$ будет выполнено включение $cf_1 \in Z(w_0)$, но при этом $f_1(\tau_0) \neq 0$.

Положим $k = z/2$. Для $w \in S(W)$ и любого $\theta > 0$ найдется функция $f \in W$, для которой выполнено: $f(\tau) \leq \theta w(\tau)$ на F и $f(\tau_0) \geq z\theta$. Если $w(\tau_0) \leq k\theta$, то по теореме Арцела можно подобрать требуемое в лемме число δ_0 . Лемма доказана.

Пусть заданы число $\delta > 0$, функции e_j , $j \in I(N)$ (из следствия 1), и $J \subset I(N)$, $\#J \leq N - 1$. Положим $G(J) = \text{conv}\{e_j, j \in J\}$, $\gamma = \text{conv}\{e_j, j \in I(N)\}$, а $\delta < \eta$ (точные условия на параметр $\eta > 0$ содержатся в доказательстве леммы 4). Тогда справедлива

ЛЕММА 4. 1. Для любой точки $g \in \gamma$ выполнено неравенство

$$\rho(g, R) \leq \frac{N-1}{N}(1+\delta).$$

2. Для любых точек $g \in G(J)$ и $r \in R$ при $\varepsilon \in [0; 1]$ из условий $\|g - r\| \leq (1+\varepsilon)\rho(g, R)$ и $j_0 \in I(N) \setminus J$ следует

$$\int_{U_{j_0}} |r(\tau)| d\tau \leq 5\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость первой части леммы. Если $g = \sum_{j=1}^N \mu_j e_j \in \gamma$ ($\mu \in \Delta$), то выполнено неравенство

$$\rho(g, R) \leq \min_j \|g - \mu_j e_j\| \leq (1 - \max_j \mu_j)(1+\delta) \leq \frac{N-1}{N}(1+\delta).$$

Теперь докажем вторую часть леммы. Пусть

$$r(\tau) = \frac{v(\tau)}{w(\tau)}, \quad \int_{U_{j_0}} |r(\tau)| d\tau = \sigma > 4\varepsilon,$$

где $v \in V$, $w \in W^+$ и $\|w\|_C = 1$. Пусть $\eta < a := d/(10N)$ и $O = [-a + \tau_{j_0}; \tau_{j_0} + a]$ – окрестность точки τ_{j_0} . Тогда $U_{j_0} \subset O$ и $O \cap U_j = \emptyset$ при $j \neq j_0$. Введем следующие обозначения: $U = U_{j_0}$, $E = O \setminus U$ и $F = [0; 1] \setminus O$. Заметим, что из первой части леммы (при $\varepsilon < 1$, $\delta < 1/3$) следует неравенство $\|r\| \leq 4$. Отсюда получаем $\int_O |v(\tau)| d\tau \leq 4$. Для любого $q > 0$ существует $\delta_1 > 0$ для которого из неравенств $\mu(U) = \delta \leq \delta_1$ и $\int_O |v(\tau)| d\tau \leq 4$ вытекает $\int_U |v(\tau)| d\tau \leq q$. В итоге справедлива оценка $\min_U w(\tau) \leq q/\sigma$. Положим $\theta = q/(2k\varepsilon)$, где число k определено в лемме 3, а q подобрано таким образом, что $4\theta/(1+\theta) \leq \varepsilon/4$. Можно подобрать $\delta_1 > 0$ для которого $w(\tau_{j_0}) \leq 2q/\sigma \leq k\theta$. Применяя лемму 3, получим функцию f . Рассмотрим дробь $\tilde{r} = v/(w+f)$.

Проведем необходимые оценки. Во-первых,

$$\int_E \left| g(\tau) - \frac{v(\tau)}{w(\tau) + f(\tau)} \right| d\tau \leq \delta + \int_U \frac{|v(\tau)|}{w(\tau) + f(\tau)} d\tau \leq \delta + \int_E \frac{|v(\tau)|}{w(\tau)} d\tau \leq \int_E \left| g(\tau) - \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| d\tau + 2\delta.$$

Мы воспользовались тем, что $\int_O |g(\tau)| d\tau \leq \delta$. Во-вторых,

$$\begin{aligned} \int_U \left| g(\tau) - \frac{v(\tau)}{w(\tau) + f(\tau)} \right| d\tau &\leq \delta + \int_U \left| \frac{v(\tau)}{w(\tau) + f(\tau)} \right| d\tau \leq \delta + \frac{1}{2} \int_U \left| \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| d\tau = \delta + \frac{\sigma}{2} \\ &\leq \int_U \left| g(\tau) - \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| d\tau - \frac{\sigma}{2} + 2\delta. \end{aligned}$$

Оценим интеграл по множеству F :

$$\int_F \left| g(\tau) - \frac{v(\tau)}{w(\tau) + f(\tau)} \right| d\tau \leq \int_F \left| g(\tau) - \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| d\tau + \int_F \left| \frac{v(\tau)}{w(\tau) + f(\tau)} - \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| d\tau.$$

Оценим последний из интегралов следующим образом:

$$\int_F \left| \frac{v(\tau)}{w(\tau) + f(\tau)} - \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| d\tau \leq \int_F \left| \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| \left(1 - \frac{w(\tau)}{w(\tau) + f(\tau)} \right) d\tau \leq \frac{\theta}{1 + \theta} \int_F \left| \frac{v(\tau)}{w(\tau)} \right| d\tau \leq \frac{4\theta}{1 + \theta};$$

мы применили неравенство $\|r\| \leq 4$. Итак, справедлива оценка

$$\rho(g, R) \leq \|g - \tilde{r}\| \leq \|g - r\| - \frac{\sigma}{2} + 4\delta + \frac{4\theta}{1 + \theta}.$$

Сопоставляя последнее неравенство и $\|g - r\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(g, R)$, получаем

$$\frac{\sigma}{2} \leq \varepsilon\rho(g, R) + 4\delta + \frac{4\theta}{1 + \theta} \leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

(мы считаем, что $\eta \leq \varepsilon/16$). Положим $\eta = \min\{\delta_0, \delta_1, d/(10N), 1/3, \varepsilon/16\}$. Итак, $\sigma \leq 5\varepsilon$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть число $\sigma > 0$ достаточно мало, а $\psi: \Delta \rightarrow \Delta$ — непрерывное отображение такое, что для любой грани G симплекса Δ ($0 \leq \dim G < \dim \Delta$) выполнено неравенство $\sup_{a \in \psi(G)} \rho(a, G) \leq \sigma$. Тогда справедливо $p \in \psi(\Delta)$, где $p = (1/N, \dots, 1/N)$ — центр симплекса Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть утверждение леммы не выполнено и $p \notin \psi(\Delta)$. Рассмотрим отображение $f: \Delta \rightarrow \Delta$, определенное таким образом: $f(x) = l(\psi(x); p) \cap \partial\Delta$, где $l(a, b)$ — луч, идущий из a в b . Заметим, что у f нет неподвижных точек. Это противоречит теореме Брауэра. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $N = [n/2] + 1$. Мы покажем, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, соответствующие функции $e_1, \dots, e_N$, (из следствия 1) и симплекс $\gamma = \{f_\lambda \in L_1[0; 1]: f_\lambda = \sum_{j=1}^N \lambda_j e_j, \lambda \in \Delta\}$, что Φ будет иметь точки разрыва уже на γ (ограничения на ε_0 возникнут в процессе доказательства). Пусть $r_\lambda = \Phi(f_\lambda)$. Рассмотрим отображение $F_j: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$, устроенное следующим образом:

$$F(f_\lambda) = \frac{1}{S(f_\lambda)} (F_1(r_\lambda), \dots, F_N(r_\lambda)),$$

где $F_j: L_1[U_j] \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in I(N)$, определено так: $F_j(g) = \int_{U_j} |g(\tau)| d\tau$, и $S(f_\lambda) := \sum_{j=1}^N F_j(r_\lambda)$ (ниже мы покажем, что $S(f_\lambda) > 0$). Заметим, что $F(\gamma) \subset \Delta$. Достаточно показать, что так определенное F не может быть непрерывным на всем γ . Для любого $j \in I(N)$ выполнено неравенство $F_j(f_\mu) \geq 1 - \delta$. Из определения ε -выборки следует, что

$$(1 + \varepsilon)\rho(f_\mu, R) \geq \|f_\mu - r_\mu\| \geq \sum_{j=1}^N F_j(f_\mu - r_\mu) \geq 1 - N\delta - \sum_{j=1}^N F_j(r_\mu).$$

Отсюда и из леммы 4 для любого $\mu \in \Delta$ получаем неравенство

$$S(f_\mu) \geq 1 - N\delta - (1 + \varepsilon)(1 + \delta) \frac{N - 1}{N}.$$

Итак, при достаточно малых $\varepsilon, \delta > 0$ справедлива оценка

$$S(f_\mu) \geq \frac{1}{2N}.$$

Из последнего неравенства и леммы 4 следует, что в нашей ситуации применима лемма 5. Итак, найдется точка $f_\lambda \in \gamma$ такая, что $F(f_\lambda) = (1/N, \dots, 1/N)$. Применив лемму 2 при $C = 2$, получим неравенство $\|r_\lambda\| \geq 2$, которое противоречит оценке

$$\|r_\lambda\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(f_\lambda, R) + \|f_\lambda\| \leq \frac{N - 1}{N}(1 + \delta)(1 + \varepsilon) + 1 + \delta.$$

Теорема 1 доказана.

3. Замечания. Теорема 1 применима к множеству алгебраических рациональных функций $R_{m,n}$, $n \geq 2$. Более того, можно доказать ее аналог, когда $n = 1$. Однако в этом случае приходится использовать несколько иную конструкцию. На самом деле показано, что $\varepsilon_0(V, W) = \varepsilon_0(n)$, т.е. зависит только от $\dim W = n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Царьков И. Г. // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 122–131. 2. Rjutin K. S. // East J. Approx. (to appear). 3. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.