Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари, Нормальные матрицы и обобщение формулы Малышева, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 5, 652–662

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:27:14

УДК 519.6

НОРМАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ МАЛЫШЕВА

Х. Д. Икрамов, А. М. Назари

Пусть A – комплексная матрица порядка n , $n \geq 3$. Сопоставим ей матрицу утроенного порядка

$$Q(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & A & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – скалярные параметры и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Пусть σ_i , $1 \leq i \leq 3n$, – сингулярные числа матрицы $Q(\gamma)$, упорядоченные по убыванию. Доказано, что спектральное расстояние от нормальной матрицы A до множества $\mathcal{M}$ матриц, имеющих собственное значение 0 кратности ≥ 3 , равно

$$\max_{\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_3 \in \mathbb{C}} \sigma_{3n-2}(Q(\gamma)).$$

Этот факт является уточнением (в случае нормальных матриц) формулы А. Н. Малышева для спектрального расстояния от произвольной $(n \times n)$ -матрицы A до множества $(n \times n)$ -матриц, имеющих кратное собственное значение нуль.

Библиография: 2 названия.

1. Введение. Пусть A – комплексная $(n \times n)$ -матрица, $\mathcal{L}$ – множество $(n \times n)$ -матриц с кратным собственным значением 0. А. Н. Малышевым получена следующая формула для спектрального расстояния от A до $\mathcal{L}$ (см. [1]):

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \min_{L \in \mathcal{L}} \|A - L\|_2 = \max_{\gamma \geq 0} \sigma_{2n-1}(P(\gamma)). \quad (1)$$

Здесь

$$P(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma I_n \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

а $\sigma_i(\cdot)$ обозначает i -е сингулярное число соответствующей матрицы. В дальнейшем без специального упоминания предполагается, что сингулярные числа всякой матрицы упорядочены по убыванию.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ – множество $(n \times n)$ -матриц, имеющих собственное значение 0 кратности ≥ 3 . Ясно, что $\mathcal{M}$ является подмножеством множества $\mathcal{L}$. Спрашивается, можно ли выразить спектральное расстояние от A до $\mathcal{M}$ точной формулой типа (1)?

Попытка обосновать такую формулу была предпринята в [2]. Сопоставим матрице A матрицу утроенного порядка

$$Q(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & A & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – скалярные параметры и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Определим функцию

$$f(\gamma) = \sigma_{3n-2}(Q(\gamma)). \quad (3)$$

В [2] показано, что для расстояния $\rho_2(A, \mathcal{M})$ справедлива нижняя оценка

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) \geq \max_{\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma \in \mathbb{C}} f(\gamma). \quad (4)$$

При этом, если функция (3) имеет локальный экстремум в какой-либо точке $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*)$, где

$$\gamma_1^* > 0, \quad \gamma_2^* > 0, \quad (5)$$

то (4) превращается в равенство

$$\rho_2(A, \mathcal{M}) = \max_{\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \gamma_3 \in \mathbb{C}} f(\gamma). \quad (6)$$

В данной статье мы доказываем, что для нормальной матрицы A имеет место именно равенство (6), а не просто неравенство (4). Изложим вкратце соображения, на которых основан этот вывод; они развиваются более подробно в разделах 2–5.

Пусть

$$\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_n(A) \quad (7)$$

суть сингулярные числа матрицы A . Если

$$\sigma_{n-2}(A) = \sigma_{n-1}(A) = \sigma_n(A), \quad (8)$$

то, очевидно,

$$f(0) = \sigma_n(A) = \sigma_{n-2}(A). \quad (9)$$

В то же время, существует матрица с (по меньшей мере) тройным собственным значением 0, находящаяся от A на (спектральном) расстоянии $\sigma_{n-2}(A)$, а именно, матрица B с теми же сингулярными векторами, что у A , и сингулярными числами $\sigma_1(A), \dots, \sigma_{n-3}(A), 0, 0, 0$. Вместе с (4) и (9), данное наблюдение доказывает равенство (6) для рассматриваемого случая. Заметим, что нормальность матрицы A в этом рассуждении не используется.

Для дальнейшего анализа важны приводимые ниже свойства функции f . Они имеют место для произвольной матрицы A и либо обоснованы в [2], либо доказываются таким же образом, каким в [1] доказываются свойства функции

$$g(\gamma) = \sigma_{2n-1}(P(\gamma)).$$

а) Поскольку сингулярные числа матрицы непрерывно зависят от ее элементов, f есть непрерывная функция от γ_1, γ_2 и γ_3 .

б) Функция f либо тождественно равна нулю (что соответствует ситуации, когда $A \in \mathcal{M}$), либо не обращается в нуль ни в одной точке $\gamma \neq 0$.

в) Имеют место равенства

$$f(-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = f(\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3), \quad f(\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3) = f(\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3).$$

Именно они позволяют ограничиться точками ортанта $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$ при вычислении максимумов в правых частях соотношений (4) и (6).

г) Справедливо предельное соотношение

$$f(\gamma) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\gamma\|_2^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2 \rightarrow 0. \quad (10)$$

Из перечисленных свойств вытекает: если $A \notin \mathcal{M}$, то существует точка

$$\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \gamma_3^*), \quad (11)$$

реализующая глобальный максимум функции f на множестве

$$\gamma_1 \geq 0, \quad \gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_3 \in \mathbb{C}.$$

Например, в ситуации, описываемой соотношениями (8), глобальный максимум достигается в точке

$$\gamma = (0, 0, 0) \quad (12)$$

(или, сокращенно, $\gamma = 0$).

Суть проводимого ниже анализа в том, чтобы показать следующее.

1. Если

$$\sigma_{n-1}(A) < \sigma_{n-2}(A), \quad (13)$$

то (12) не может быть точкой максимума функции f . Это утверждение обосновывается в разделах 3 и 4; первый из них относится к случаю, когда

$$\sigma_n(A) < \sigma_{n-1}(A), \quad (14)$$

а второй – к значительно более сложной ситуации, когда (13) сочетается с равенством

$$\sigma_n(A) = \sigma_{n-1}(A). \quad (15)$$

2. Если γ^* – точка максимума функции f и

$$\sigma^* = f(\gamma^*),$$

то σ^* есть кратное сингулярное число матрицы $Q(\gamma^*)$.

Доказательства утверждений 1 и 2 используют описываемую в разделе 2 редукцию матрицы $Q(\gamma)$ к прямой сумме (3×3) -блоков. Наличие такой редукции существенно упрощает исследование по сравнению со случаем матрицы A общего вида.

Опираясь на утверждения 1 и 2, мы показываем в разделе 5, что в точке γ^* выполняются соотношения

$$\gamma_1^* = \gamma_2^* > 0.$$

Как было отмечено выше, эти соотношения гарантируют равенство (6).

2. Редукция задачи. Пусть A – нормальная $(n \times n)$ -матрица со спектральным разложением

$$A = W\Lambda W^*,$$

где W – унитарная матрица собственных векторов, а

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (16)$$

Порядок собственных значений в (16) подчинен условиям (7).

Произведем с матрицей (2) унитарное подобие

$$Q(\gamma) \rightarrow R(\gamma) = U^*Q(\gamma)U,$$

где

$$U = W \oplus W \oplus W.$$

Получим

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} \Lambda & \gamma_1 I_n & \gamma_3 I_n \\ 0 & \Lambda & \gamma_2 I_n \\ 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Симметричной перестановкой строк и столбцов матрица (17) приводится к прямой сумме

$$S(\gamma) = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_n, \quad (18)$$

где

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \gamma_1 & \gamma_3 \\ 0 & \lambda_i & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку матрицы $Q(\gamma)$ и $S(\gamma)$ унитарно подобны, справедливо равенство

$$f(\gamma) = \sigma_{3n-2}(S(\gamma)).$$

В силу разложения (18) сингулярный спектр матрицы $S(\gamma)$ есть объединение сингулярных спектров блоков $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Это обстоятельство широко используется в дальнейшем.

3. Сингулярные числа матрицы Γ . Для последующего анализа нам необходимы несколько простых оценок, связанных с сингулярными числами матрицы

$$\Gamma(\gamma) = \begin{pmatrix} a & \gamma_1 & \gamma_3 \\ 0 & a & \gamma_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где a – произвольное комплексное число.

ЛЕММА 1. Если $\sigma_1(\gamma)$ – старшее сингулярное число матрицы (19), то

$$\sigma_1(\gamma) \geq \max\{(|a|^2 + |\gamma_1|^2 + |\gamma_3|^2)^{1/2}, (|a|^2 + |\gamma_2|^2 + |\gamma_3|^2)^{1/2}\}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Числа в правой части оценки (20) суть евклидовы длины первой строки и третьего столбца матрицы $\Gamma(\gamma)$. Сама эта оценка есть простое следствие хорошо известных экстремальных описаний числа σ_1 :

$$\sigma_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|\Gamma x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \neq 0} \frac{\|\Gamma^* x\|_2}{\|x\|_2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если хотя бы одно из чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ отлично от нуля, то

$$\sigma_1(\gamma) > \sigma_1(0) = |a|. \quad (21)$$

ЛЕММА 2. Пусть $\sigma_3(\gamma)$ – младшее сингулярное число матрицы (19). Если $a \neq 0$ и хотя бы одно из чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ отлично от нуля, то

$$\sigma_3(\gamma) < \sigma_3(0) = |a|. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к матрице

$$\Gamma^{-1}(\gamma) = \frac{1}{a^3} \begin{pmatrix} a^2 & -a\gamma_1 & \gamma_1\gamma_2 - a\gamma_3 \\ 0 & a^2 & -a\gamma_2 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

оценку, аналогичную неравенству (20). Из нее следует

$$\sigma_1(\Gamma^{-1}(\gamma)) = \frac{1}{\sigma_3(\gamma)} \geq \frac{1}{|a|^2} \max\{\sqrt{|a|^2 + |\gamma_1|^2}, \sqrt{|a|^2 + |\gamma_2|^2}\},$$

откуда

$$\sigma_3(\gamma) \leq \min\left\{\frac{|a|^2}{\sqrt{|a|^2 + |\gamma_1|^2}}, \frac{|a|^2}{\sqrt{|a|^2 + |\gamma_2|^2}}\right\}. \quad (23)$$

Это неравенство дает требуемое соотношение (22), если хотя бы одно из чисел γ_1 и γ_2 отлично от нуля. В противном случае, $\gamma_3 \neq 0$ и из той же оценки типа (20) выводим

$$\sigma_3(\gamma) \leq \frac{|a|^2}{\sqrt{|a|^2 + |\gamma_3|^2}}, \quad (24)$$

что снова приводит к (22).

Доказанные леммы позволяют дать простое обоснование утверждений 1 и 2, сформулированных во введении статьи, в случае $\sigma_n(A) < \sigma_{n-1}(A)$. Действительно, в этом случае в некоторой окрестности точки $\gamma = 0$ тремя младшими сингулярными числами матриц $Q(\gamma)$ и $S(\gamma)$ являются сингулярные числа блока

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & \gamma_1 & \gamma_3 \\ 0 & \lambda_n & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Согласно (21) для точек $\gamma \neq 0$ в этой окрестности имеем

$$f(\gamma) = \sigma_1(\Gamma_n) > \sigma_1(0) = |\lambda_n| = f(0).$$

Таким образом, в точке $\gamma = 0$ нет даже локального максимума функции $f(\gamma)$.

Фиксируем неотрицательные числа α и β и комплексное число μ , не равные нулю одновременно. Рассмотрим динамику сингулярных чисел матрицы $S(\gamma)$ при движении от точки $\gamma = 0$ вдоль луча

$$\gamma_1 = \alpha t, \quad \gamma_2 = \beta t, \quad \gamma_3 = \mu t. \quad (26)$$

Согласно (20) число $\sigma_1(\Gamma_n)$ неограниченно возрастает с ростом t . Поэтому максимум функции f вдоль луча (26) достигается при значении $t = t_0$, соответствующем точке пересечения графика $\sigma_1(\Gamma_n)$ с графиком младшего сингулярного числа одного из блоков Γ_i , $i = 1, \dots, n-1$. Поскольку точка γ^* глобального максимума является одновременно максимумом вдоль соответствующего луча, отсюда следует утверждение 2. Отметим, что сингулярные числа, значения которых совпадают в точке максимума, соответствуют собственным значениям λ_i и λ_n различного модуля. Это наблюдение будет использовано в разделе 5.

4. Случай $\sigma_n(A) = \sigma_{n-1}(A)$. Этот случай значительно сложнее предыдущего. Мы исследуем его вначале при дополнительном предположении: два собственных значения матрицы A , имеющие наименьший модуль, удовлетворяют условию

$$\lambda_{n-1} + \lambda_n \neq 0. \quad (27)$$

Это означает, в частности, что $\lambda_n \neq 0$.

Покажем, что при условии (27) существуют луч (26) и некоторая окрестность $\mathcal{O}$ точки $t = 0$ на этом луче такие, что $\sigma_2(\Gamma_n)$ и $\sigma_2(\Gamma_{n-1})$ суть монотонно возрастающие функции от t в пределах $\mathcal{O}$. Отсюда будет вытекать утверждение 1. Действительно, для ненулевых $t \in \mathcal{O}$ имеем

$$f(\gamma) = \min\{\sigma_2(\Gamma_n), \sigma_2(\Gamma_{n-1})\} > \sigma_2(0) = \sigma_{n-1}(A) = f(0).$$

Нам будет удобнее вместо самих чисел $\sigma_i(\Gamma_n)$ рассматривать их квадраты, являющиеся собственными значениями эрмитовой матрицы

$$G_n = \Gamma_n^* \Gamma_n = |a|^2 I_3 + t(\bar{a}M + aM^*) + t^2 M^* M.$$

Здесь

$$a = \lambda_n, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \mu \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичная интерпретация при необходимости применяется к сингулярным числам других блоков Γ_i .

Для малых t справедливы представления

$$\sigma_i^2(\Gamma_n) = |a|^2 + \delta_i t + \mathcal{O}(t^2), \quad i = 1, 2, 3,$$

где коэффициенты при линейных членах $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ суть собственные значения эрмитовой матрицы

$$H = \bar{a}M + aM^* = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\bar{a} & \mu\bar{a} \\ \alpha a & 0 & \beta\bar{a} \\ \bar{\mu}a & \beta a & 0 \end{pmatrix}.$$

Фиксируем положительные числа α, β и выберем число $\mu = x + iy$ так, чтобы $\det H$ был отрицательным числом. Поскольку

$$\det H = \alpha\beta|a|^2(\mu a + \bar{\mu}\bar{a}),$$

это равносильно тому, что

$$\operatorname{Re}(\mu a) = (\operatorname{Re} \lambda_n)x - (\operatorname{Im} \lambda_n)y < 0. \quad (28)$$

Нулевой след матрицы H и отрицательность ее определителя вместе означают, что два из чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ положительны, а третье отрицательно. Отсюда следует, что при движении из нуля вдоль луча (26) два сингулярных числа клетки Γ_n возрастают, а третье убывает.

Наложим на выбор числа μ еще одно ограничение, а именно

$$\operatorname{Re}(\mu \lambda_{n-1}) = (\operatorname{Re} \lambda_{n-1})x - (\operatorname{Im} \lambda_{n-1})y < 0. \quad (29)$$

Условие (27) обеспечивает, что система неравенств (28), (29) имеет решение $\mu = x + iy$. Для соответствующего луча (26) сингулярные числа клетки Γ_{n-1} ведут себя так же, как для Γ_n , т.е. два из них возрастают, а третье убывает. В частности, $\sigma_2(\Gamma_{n-1})$, как и $\sigma_2(\Gamma_n)$, растет с ростом t . Тем самым, утверждение 1 установлено.

Предыдущие рассуждения относились к значениям t , принадлежащим окрестности $\emptyset$. Покажем, что и при дальнейшем продвижении вдоль луча (26) рост $\sigma_2(\Gamma_n)$ и $\sigma_2(\Gamma_{n-1})$ продолжится по крайней мере до тех пор, пока графики этих чисел не пересекутся с графиком какого-либо из чисел $\sigma_3(\Gamma_i)$, $i = 1, \dots, n-2$.

Предположим противное; пусть, например, $\sigma_2(\Gamma_n)$ имеет локальный максимум σ_2^* при $t = t_0$, причем σ_2^* не является сингулярным числом ни для одного из блоков Γ_i , $i = 1, \dots, n-2$.

Повторяя для матрицы Γ_n те же рассуждения, какие в [2] были применены к блочной матрице $Q(\gamma)$, приходим к следующему заключению: существуют относящиеся к σ_2^* нормированные правый сингулярный вектор

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (30)$$

и соответствующий левый сингулярный вектор

$$v = \frac{1}{\sigma_2^*} \Gamma_n u = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

такие, что

$$\begin{aligned} |v_1|^2 &= |u_1|^2, & |v_2|^2 &= |u_2|^2, & |v_3|^2 &= |u_3|^2, \\ \bar{v}_1 v_2 &= \bar{u}_1 u_2, & \bar{v}_1 v_3 &= \bar{u}_1 u_3, & \bar{v}_2 v_3 &= \bar{u}_2 u_3. \end{aligned} \quad (32)$$

(Эти равенства суть скалярный аналог матричного соотношения $V^*V = U^*U$, полученного в следствии из леммы 6 в [2].)

Из соотношений (32) вытекает, что

$$v = e^{i\varphi} u, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (31), имеем

$$\Gamma_n u = e^{i\varphi} \sigma_2^* u,$$

т.е. u должен быть собственным вектором матрицы Γ_n для собственного значения $e^{i\varphi} \sigma_2^*$. Однако такого собственного значения у Γ_n нет: все три ее собственных значения равны λ_n , тогда как

$$|e^{i\varphi} \sigma_2^*| = \sigma_2^* > |\lambda_n|.$$

Те же соображения применимы и к блоку Γ_{n-1} . Поэтому функция

$$f(\gamma) = \min\{\sigma_2(\Gamma_n), \sigma_2(\Gamma_{n-1})\}$$

возрастает вдоль луча (26), пока при некотором $t = t_0$ график $f(\gamma)$ не пересечется с графиком некоторого числа $\sigma_3(\Gamma_i)$, $i = 1, \dots, n-2$.

Отметим, что в проведенном выше рассуждении локальный максимум функции $\sigma_2(\Gamma_n)$ может быть заменен ее локальным минимумом (лемма 6 в [2] справедлива для любого локального экстремума). Поэтому, если вдоль какого-то луча (26) $\sigma_2(\Gamma_n)$ убывает при $t = 0$, то это убывание сохранится и в дальнейшем. На лучах этого типа, следовательно, глобальный максимум функции f достигаться не может. Он достигается на некотором луче рассмотренного ранее типа и, как вытекает из нашего анализа, $\sigma^* = f(\gamma^*)$ есть кратное сингулярное число матрицы $Q(\gamma^*)$. При этом сингулярные числа, значения которых совпадают в точке γ^* , соответствуют собственным значениям λ_n и λ_i (или λ_{n-1} и λ_i), $i \in \{1, \dots, n-2\}$, различного модуля.

Нам остается рассмотреть случай

$$\lambda_{n-1} = -\lambda_n. \quad (34)$$

В этом случае движение из нуля вдоль любого луча (26) с ненулевым μ не приводит к увеличению функции f по сравнению с

$$f(0) = \sigma_n(A) = \sigma_{n-1}(A). \quad (35)$$

Действительно, одно из неравенств (28) и (29) будет нарушено и соответствующее сингулярное число σ_2 будет убывать вдоль луча. Оно и является значением функции f .

Покажем, что, напротив, при движении по лучу

$$\gamma_1 = \alpha t, \quad \gamma_2 = \beta t, \quad \gamma_3 = 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (36)$$

число $\sigma_2(\Gamma_n)$ всегда будет больше числа (35), если $t > 0$. Это же верно для $\sigma_2(\Gamma_{n-1})$. В действительности, вдоль луча (36) блоки Γ_{n-1} и Γ_n имеют одни и те же сингулярные числа, поскольку $G_{n-1} = \Gamma_{n-1}^* \Gamma_{n-1}$ и $G_n = \Gamma_n^* \Gamma_n$ (с точностью до диагонального подобия) совпадают с одной и той же матрицей

$$G = |a|^2 I_3 + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \bar{a} t & 0 \\ \alpha a t & \alpha^2 t^2 & \beta \bar{a} t \\ 0 & \beta \alpha t & \beta^2 t^2 \end{pmatrix} = |a|^2 I_3 + H.$$

Здесь $|a| = |\lambda_{n-1}| = |\lambda_n| = \sigma_n(A)$.

Присутствие в матрице H положительно полуопределенного (2×2) -блока

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 t^2 \end{pmatrix}$$

свидетельствует, что ее второе собственное значение $\lambda_2(H)$ неотрицательно. На самом деле,

$$\lambda_2(H) > 0, \quad (37)$$

так как

$$\det H = -\alpha^2 \beta^2 |a|^2 t^4 \neq 0$$

при $t \neq 0$. Неравенство (37) означает, что

$$\sigma_2(\Gamma_n) > |a| = f(0), \quad \text{если } t > 0.$$

Итак, утверждение 1 справедливо и в этом случае. Утверждение 2 обосновывается так же, как и выше.

5. Глобальный максимум функции $f(\gamma)$. В двух предыдущих разделах установлено: глобальный максимум функции $f(\gamma)$ может достигаться лишь в точках γ , где одно из сингулярных чисел блока Γ_n (или блока Γ_{n-1} ; см. раздел 4) совпадает с младшим сингулярным числом одного из блоков Γ_i . При этом $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ в разделе 3 и $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ в разделе 4. Во всех случаях совпадающие сингулярные числа относятся к блокам Γ , порожденным собственными значениями различного модуля. Пусть $a(b)$ то из них, которое имеет больший (меньший) модуль. Соответствующие им блоки обозначим через Γ_a и Γ_b .

Характеристический многочлен матрицы $G_a = \Gamma_a^* \Gamma_a$ имеет вид

$$\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\operatorname{tr} G_a = -(3|a|^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2), \\ \alpha_2 &= 3|a|^4 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2)|a|^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{Re}(\gamma_3 a), \\ \alpha_3 &= -|\det \Gamma_a|^2 = -|a|^6. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения справедливы для коэффициентов характеристического многочлена

$$\lambda^3 + \beta_1 \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \beta_3 = 0 \quad (39)$$

матрицы $G_b = \Gamma_b^* \Gamma_b$.

По предположению матрицы G_a и G_b имеют общее собственное значение, которое удовлетворяет обоим уравнениям (38) и (39), а потому и квадратному уравнению

$$(\alpha_1 - \beta_1)\lambda^2 + (\alpha_2 - \beta_2)\lambda + \alpha_3 - \beta_3 = 0$$

или приведенному уравнению

$$\lambda^2 + r(\gamma)\lambda + s(\gamma) = 0. \quad (40)$$

Здесь

$$r(\gamma) = -(|a|^2 + |b|^2) - \frac{1}{3}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2) + \frac{2}{3}\gamma_1\gamma_2 \frac{\operatorname{Re}[\gamma_3(a-b)]}{|a|^2 - |b|^2},$$

а $s(\gamma)$, в действительности, не зависит от γ :

$$s(\gamma) = \frac{1}{3}(|a|^4 + |b|^4 + |a|^2|b|^2).$$

Положим $\gamma_3 = \xi_3 + i\xi_4$. Тогда коэффициент $r(\gamma)$ есть гладкая функция от вещественных переменных $\gamma_1, \gamma_2, \xi_3, \xi_4$. Поэтому корни уравнения (40) там, где они различны, тоже гладко зависят от $\gamma_1, \gamma_2, \xi_3, \xi_4$.

Точке глобального максимума γ^* соответствует экстремум по γ корня $\lambda(\gamma)$ уравнения (40). Дифференцируя равенство (40), нетрудно убедиться, что необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_3} = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_4} = 0$$

равносильны условиям

$$\frac{\partial r}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial r}{\partial \xi_3} = \frac{\partial r}{\partial \xi_4} = 0. \quad (41)$$

Первые два условия (41) имеют вид

$$-\frac{2}{3}\gamma_1 + \frac{2}{3}\gamma_2 \frac{\operatorname{Re}[\gamma_3(a-b)]}{|a|^2 - |b|^2} = 0, \quad -\frac{2}{3}\gamma_2 + \frac{2}{3}\gamma_1 \frac{\operatorname{Re}[\gamma_3(a-b)]}{|a|^2 - |b|^2} = 0.$$

С учетом того, что γ_1 и γ_2 должны быть неотрицательными числами, имеем

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

Для оставшихся условий (41) положим

$$a - b = c + id, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\operatorname{Re}[\gamma_3(a-b)] = c\xi_3 - d\xi_4$ и

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_3} = -\frac{2}{3}\xi_3 + \frac{2}{3}\gamma_1\gamma_2 \frac{c}{|a|^2 - |b|^2}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_4} = -\frac{2}{3}\xi_4 - \frac{2}{3}\gamma_1\gamma_2 \frac{d}{|a|^2 - |b|^2}. \quad (43)$$

Если предположить, что в точке максимума γ^* координаты γ_1 и γ_2 обращаются в нуль, то условия

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_3} = \frac{\partial r}{\partial \xi_4} = 0$$

приводят к равенствам $\xi_3^* = \xi_4^* = 0$. Это означало бы, что $\gamma^* = 0$ в противоречие с утверждением 1.

Итак, должно быть

$$\gamma_1^* = \gamma_2^* > 0,$$

что влечет за собой справедливость формулы (6).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Malyshev A. N. A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues // Numer. Math. 1999. V. 83. P. 443–454.
- [2] Икрамов Х. Д., Назари А. М. О расстоянии до ближайшей матрицы с тройным собственным значением нуль // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 545–555.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
13.05.2003