Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сидельникова, Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора, порожденного выражением $y^{\text{IV}} - 2a(x^\alpha y')' + bx^\beta y$, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm610>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:41:09

ОБ ИНДЕКСАХ ДЕФЕКТА СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО ВЫРАЖЕНИЕМ $y^{IV} - 2a(x^\alpha y')' + bx^\beta y$

Н. А. Сидельникова

1. Введение. Пусть L_0 – минимальный симметрический оператор в пространстве $L_2[1, \infty)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - 2a(x^\alpha y')' + bx^\beta y. \quad (1)$$

Здесь λ – комплексный параметр, a, b, α, β – вещественные постоянные, причем $a \neq 0, b < 0, \alpha > 0, 0 < \beta < 2\alpha$ и $2b/a \neq -(\alpha - 1)^2$. При таких значениях параметров корни характеристического полинома для дифференциального уравнения

$$l(y) - \lambda y = 0 \quad (2)$$

таковы, что часть из них растет, а остальные убывают при $x \rightarrow \infty$.

При изучении задачи об индексах дефекта оператора L_0 такой случай называется *вырожденным*. Он является наиболее сложным.

Случай, когда все корни характеристического полинома растут при $x \rightarrow \infty$ (или, наоборот убывают) подобно изучен [1]. Нам известны две работы, где рассматривался вырожденный случай: в [2] при $\alpha > 2/3, 0 < \beta < 2\alpha, \beta \neq \alpha - 2$ и в [3] при $\alpha > 2, \beta = \alpha - 2$.

Основной вспомогательной задачей при изучении индексов дефекта оператора L_0 является задача о нахождении асимптотических формул для решений уравнения (2) при $x \rightarrow \infty$. Ниже мы получим такие формулы.

2. Асимптотические формулы для решений уравнения (2) при $x \rightarrow \infty$. Характеристический полином уравнения (2) имеет вид

$$F(x, \lambda, \mu) = \mu^4 - 2p(x)\mu^2 + q(x) - \lambda,$$

где $p(x) = ax^\alpha, q(x) = bx^\beta$. Корни уравнения $F(x, \lambda, \mu) = 0$ вычисляются по формулам

$$\mu_{1,2}(x, \lambda) = \pm \sqrt{p(x) - \sqrt{p^2(x) + \lambda - q(x)}}, \quad \mu_{3,4}(x, \lambda) = \pm \sqrt{p(x) + \sqrt{p^2(x) + \lambda - q(x)}}. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (1) имеет систему линейно-независимых решений $y_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$, таких, что при $x \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} y_1^{[k]} &\sim (\alpha_1 \mu_1^k + \alpha_2 s_{21} \mu_2^k) \exp \left(\int_1^x \nu_1(t, \lambda) dt \right), \quad k = 0, 1, 2, \\ y_1^{[3]} &\sim (\alpha_1 \mu_1(2p - \mu_1^2) + \alpha_2 s_{21} \mu_2(2p - \mu_2^2)) \exp \int_1^x \nu_1(t, \lambda) dt, \\ y_2^{[k]} &\sim (\alpha_2 \mu_2^k + \alpha_1 s_{12} \mu_1^k) \exp \left(\int_1^x \nu_2(t, \lambda) dt \right), \quad k = 0, 1, 2, \\ y_1^{[3]} &\sim (\alpha_2 \mu_2(2p - \mu_2^2) + \alpha_1 s_{12} \mu_1(2p - \mu_1^2)) \exp \int_1^x \nu_2(t, \lambda) dt, \\ y_j^{[k]} &\sim \alpha_j \mu_j^k \exp \left(\int_1^x \mu_j(t, \lambda) dt \right), \quad k = 0, 1, 2, \\ y_j^{[3]} &\sim \alpha_j \mu_j(2p - \mu_j^2) \exp \left(\int_1^x \mu_j(t, \lambda) dt \right), \quad \text{где } j = 3, 4, \\ \alpha_i &= \left(\frac{\partial F(x, \lambda, \mu_i)}{\partial \mu} \right)^{-1/2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\nu_{1,2} = \pm \sqrt{\mu_1^2 - c_{12}^2}, \quad c_{12} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (-2p'(x) \mu_1 \mu_2 + q'(x))}{\mu_1 - \mu_2}, \quad s_{12} = s_{21} = \frac{c_{12}}{\nu_1 + \mu_1}. \quad (5)$$

Здесь запись $y \sim z$ означает, что $y/z \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$.

Наметим идею доказательства теоремы 1. Как и в работах [1], [4]–[6] уравнение (2) сводится к системе, состоящей из четырех дифференциальных уравнений первого порядка $Y' = A(x, \lambda)Y$. Известным преобразованием [1] данная система приводится к виду $U' = \Lambda_0 U - (C + B)U$,

$$\Lambda_0 = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы B суммируемы на интервале $[1, \infty)$. Поскольку элементы матрицы C не принадлежат классу $L[1, \infty)$, мы при помощи нового преобразования

$$U = DZ, \quad D = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & s_{12} \\ s_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & c_{34}/(\mu_3 - \mu_4) \\ c_{43}/(\mu_4 - \mu_3) & 1 \end{pmatrix}$$

приводим полученную систему к L -диагональному виду: $Z' = \Lambda Z + \theta Z$, где $\Lambda = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2, \mu_3, \mu_4\}$, а элементы матрицы θ суммируемы на $[1, \infty)$.

3. Исследование индексов дефекта оператора L_0 . Теорема 1 позволяет решить задачу об индексах дефекта минимального симметрического оператора L_0 . Известно, что индексы дефекта оператора L_0 равны (n, n) , где n – число линейно независимых решений уравнения (2) при $\text{Im } \lambda \neq 0$, принадлежащих классу $L_2[1, \infty)$.

Из соотношений (3), (4) с учетом условия $\beta < 2\alpha$ получаем при $x \rightarrow \infty$

$$\mu_3 = -\mu_4, \quad \mu_3 = \sqrt{2a} x^{\alpha/2} (1 + o(1)), \quad (6)$$

$$\alpha_3 = i\alpha_4, \quad \alpha_3 = \text{const } x^{-3\alpha/4} (1 + o(1)). \quad (7)$$

Из полученных в теореме 1 асимптотических формул для решений $y_3(x, \lambda)$, $y_4(x, \lambda)$ и соотношений (6) и (7) получаем

$$y_3 = \text{const } x^{-3\alpha/2} \exp \left(\frac{2\sqrt{2a}}{(\alpha+2)} x^{(\alpha+2)/2} \right) (1 + o(1)), \quad (8)$$

$$y_4 = \text{const } x^{-3\alpha/2} \exp \left(-\frac{2\sqrt{2a}}{(\alpha+2)} x^{(\alpha+2)/2} \right) (1 + o(1)), \quad (9)$$

Теперь из формул (8), (9) и условия $\alpha > 0$ имеем

$$\text{если } \alpha > 0, \text{ то } y_3(x, \lambda) \notin L_2[1, \infty), \quad y_4(x, \lambda) \in L_2[1, \infty), \quad (10)$$

$$\text{а при } \alpha < 0, \quad \alpha > 2/3 \quad y_3(x, \lambda), y_4(x, \lambda) \in L_2[1, \infty). \quad (11)$$

Далее из формул (3), (4) и соотношения $\beta > 2\alpha$ находим

$$\mu_1 = -\mu_2, \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{b}{2a}} x^{(\beta-\alpha)/2} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$\alpha_1 = i\alpha_2, \quad \alpha_1 = \text{const } x^{-(\alpha+\beta)/4} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Из соотношений (5), (12), (13) получаем при $x \rightarrow \infty$ равенства

$$c_{12} = (i(\alpha + \beta)/4) x^{-1} (1 + o(1)), \quad \nu_1 = \sqrt{(b/2a)x^{(\beta-\alpha)} + ((\alpha + \beta)^2/16)x^{-2} (1 + o(1))}.$$

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

Случай 1. Пусть $\beta - \alpha > -2$. Тогда при $x \rightarrow \infty$ получаем

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{b}{2a}} x^{(\beta-\alpha)/2} (1 + o(1)), \quad s_{12} = o(1). \quad (14)$$

Из асимптотических формул теоремы 1 для решений $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ и соотношений (12) и (13) имеем

$$y_1 = \text{const } x^{(\alpha+\beta)/4} \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{(\beta - \alpha + 2)} x^{(\beta-\alpha+2)/2}\right) (1 + o(1)), \quad (15)$$

$$y_2 = \text{const } x^{-(\alpha+\beta)/4} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{(\beta - \alpha + 2)} x^{(\beta-\alpha+2)/2}\right) (1 + o(1)). \quad (16)$$

Тогда из формул (14), (15), $b < 0$ заключаем, что

$$\text{если } \alpha < 0, \text{ то } y_1(x, \lambda) \notin L_2[1, \infty), \quad y_2(x, \lambda) \in L_2[1, \infty), \quad (17)$$

$$\text{а при } \alpha > 0, \quad \alpha - \beta + 2 < 0 \quad y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda) \in L_2[1, \infty). \quad (18)$$

Случай 2. Пусть $\beta - \alpha < -2$. Тогда

$$\nu_1 = \frac{(\alpha + \beta)}{4} x^{-1} (1 + o(1)), \quad s_{12} = i(1 + o(1)). \quad (19)$$

Из соотношений (12), (13), (19) получаем

$$y_1 = \text{const } (1 + o(1)), \quad y_2 = \text{const } x^{(-\alpha+1)} (1 + o(1)).$$

При дополнительном условии $\alpha > 2$ в этом случае имеем

$$y_1(x, \lambda) \notin L_2[1, \infty), \quad y_2(x, \lambda) \in L_2[1, \infty). \quad (20)$$

Случай 3. Пусть $\beta - \alpha = -2$. Тогда

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{b}{2a} + \frac{(\alpha - 1)^2}{4}} x^{-1} (1 + o(1)), \quad s_{12} = \frac{i(\alpha - 1)}{\sqrt{b/2a + (\alpha - 1)^2/4}} (1 + o(1)). \quad (21)$$

Из соотношений (12), (13), (21) находим

$$y_1 = \text{const } x^{(-\alpha+1)/2 + \sqrt{b/2a + (\alpha-1)^2/4}} (1 + o(1)),$$

$$y_2 = \text{const } x^{(-\alpha+1)/2 - \sqrt{b/2a + (\alpha-1)^2/4}} (1 + o(1)),$$

Поэтому при выполнении дополнительных условий $\alpha > 2$, $2b/a < -(\alpha - 1)^2$ или $-(\alpha - 1)^2 < 2b/a < 3 - 2\alpha$ имеем

$$y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda) \in L_2[1, \infty), \quad (22)$$

а при выполнении условий $\alpha > 2$, $\beta = \alpha - 2$, $2b/a \geq 3 - 2\alpha$ получаем

$$y_1(x, \lambda) \notin L_2[1, \infty), \quad y_2(x, \lambda) \in L_2[1, \infty). \quad (23)$$

Полученные нами соотношения (10), (11), (17), (18), (20), (22), (23) приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Минимальный симметрический оператор L_0 , порожденный в пространстве $L_2[1, \infty)$ дифференциальным выражением (1), в зависимости от параметров a, b, α, β имеет следующие индексы дефекта:

- 1) $(2, 2)$, если $a > 0, \alpha > 2$ и
 - а) $\beta < \alpha - 2$,
 - б) $\beta = \alpha - 2, 2b/a \geq 3 - 2\alpha$;
- 2) $(3, 3)$, если
 - а) $\beta > |\alpha - 2|$ и $a > 0$ или $\alpha > 2/3, a < 0$,
 - б) $\alpha > 2, \beta < \alpha - 2, a < 0$,
 - в) $\alpha > 2, \beta = \alpha - 2$ и $a < 0, 2b/a \geq 3 - 2\alpha$ или $-(\alpha - 1)^2 < 2b/a < 3 - 2\alpha, a > 0$ или $a > 0$ и $(\alpha - 1)^2 + 2b/a < 0$;
- 3) $(4, 4)$, если $\alpha > 2, \beta = \alpha - 2, a < 0$, и
 - а) $-(\alpha - 1)^2 < 2b/a < 3 - 2\alpha$,
 - б) $(\alpha - 1)^2 + 2b/a < 0$.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору Я. Т. Султанаеву за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорюк М. В. // Тр. ММО. 1966. Т. 15. С. 296–345.
2. Devinatz A. // Quart. J. Math. 1972. V. 23. № 91. P. 267–286.
3. Аникеева Л. И. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1976. № 6. С. 44–52.
4. Султанаев Я. Т. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 11. С. 2010–2020.
5. Султанаев Я. Т. // Тр. семинара им. Петровского. 1988. № 13. С. 36–55.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Башкирский государственный университет, г. Уфа

Поступило
03.06.2002