Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Замкнутые промежутки в $C(T)$ и $L_\varphi(T)$ и их аппроксимативные свойства, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 1, 135–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 06:33:03

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЗАМКНУТЫЕ ПРОМЕЖУТКИ В $C(T)$ И $L_\varphi(T)$ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

А. А. Васильева

Пусть X – множество с введенным на нем расстоянием $\rho: X \rightarrow [0, +\infty)$ (не обязательно являющимся метрикой), $Y \subset X$. Тогда $y \in Y \neq \emptyset$ называется *наилучшим приближением* для $x \in X$, если

$$\rho(x, y) = \rho(x, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{z \in Y} \rho(x, z).$$

Множество $Y \subset X$ называется *множеством существования* в X , если для любого $x \in X$ существует наилучшее приближение $y \in Y$. Множество $Y \subset X$ называется *чебышевским*, если для любого $x \in X$ наилучшее приближение $y \in Y$ существует и единственно.

Пусть Y – множество существования в X . *Метрическим проектором* $P: X \rightarrow 2^Y$ называется отображение, сопоставляющее каждому $x \in X$ множество всех его наилучших приближений из Y . *Выборкой* из метрического проектора называется отображение $p: X \rightarrow Y$, сопоставляющее каждому $x \in X$ одно из наилучших приближений из Y .

В этой работе изучаются:

- 1) структура замкнутого промежутка в $C(T, \mathbb{R})$ и $L_\varphi(T, \mathbb{R})$;
- 2) существование и единственность наилучшего приближения замкнутым промежутком в $C(T, X)$ и $L_\varphi(T, X)$, где X – гильбертово пространство;
- 3) существование выборки из метрического проектора на замкнутый промежуток, удовлетворяющей условию Липшица с константой 1;
- 4) устойчивость многозначного метрического проектора на замкнутый промежуток.

Изучение задачи в векторном случае связано, в частности, с вопросом существования решения краевой задачи

$$\Delta_x u + \lambda(t)F(t, u) = g(x, t), \quad u|_\Gamma = 0$$

(где $u = u(t, x)$, $t \in [a, b]$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Γ – граница области Ω) и устойчивости решения по параметру t правой части.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f_1, f_2: T \rightarrow X$. *Интервалом* $[f_1, f_2]$ в $C(T, X)$ называется

$$\{f \in C(T, X) : \forall t \in T \quad f(t) \in [f_1(t), f_2(t)]\}.$$

Множество $M \subset C(T)$ называется *промежутком*, если $\forall f_1, f_2 \in M \quad [f_1, f_2] \subset M$. Интервал $[f_1, f_2] \subset C(T, X)$ называется *интервалом I-го типа*, если $f_1, f_2 \in C(T)$. Если $X = \mathbb{R}$, $\forall t \in T \quad f_1(t) \leq f_2(t)$ и f_1, f_2 полунепрерывны соответственно сверху и снизу, то $[f_1, f_2]$ называется *интервалом II-го типа*.

Понятие интервала было введено в [1]. М. В. Кадец и В. Н. Замятин [2] доказали, что интервалы II-го типа в $C(T, \mathbb{R})$ являются множествами существования. С. Я. Хавинсон показал, что существует липшицева выборка из метрического проектора на интервал I-го типа в $C(T, \mathbb{R})$.

Пусть T – компакт в хаусдорфовом топологическом пространстве, X – гильбертово пространство над $\mathbb{R}$, $F: T \rightarrow 2^X$, $\forall t \in T$ множество $F(t)$ выпукло и замкнуто. Обозначим

$$S_F \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C(T, X) \mid \forall t \in T \ f(t) \in F(t)\}.$$

Пусть T – множество конечной меры Лебега, $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} \mu(\{t \in T : f(t) \neq g(t)\}) = 0, \quad \bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \{g : f \sim g\}.$$

Обозначим через Φ множество четных, неубывающих на $[0, +\infty)$, непрерывных в нуле функций $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(2u) = O(\varphi(u))$, $\varphi(0) = 0$ и $\forall u \neq 0 \ \varphi(u) > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Пространством $L_\varphi(T, \mathbb{R})$* , где $\varphi \in \Phi$, называется множество классов эквивалентности измеримых функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\int_T \varphi(f(t)) \, dt < \infty.$$

Для произвольных $f, g \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$ через

$$\rho_\varphi(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_T \varphi(f(t) - g(t)) \, dt$$

обозначим φ -расстояние между f и g .

Свойства пространств $L_\varphi(T, \mathbb{R})$ исследовались в [3] и [4].

Пусть $\varphi \in \Phi$, T – топологическое пространство с конечной мерой Лебега, X – гильбертово пространство. Пусть

- 1) любое открытое в T множество измеримо;
- 2) для любой функции $f \in L_\varphi(T, \mathbb{R})$ существует последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций такая, что $\rho_\varphi(f_n, f) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Рассмотрим функции $f: T \rightarrow X$ такие, что существует не более, чем счетное разбиение множества T на непересекающиеся измеримые множества T_n такие, что для любого n $f|_{T_n}$ непрерывна, и $\varphi(\|f(t)\|_X)$ интегрируема по Лебегу на T . Множество классов эквивалентности таких функций обозначим V_φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Пространством $L_\varphi(T, X)$* называется множество классов эквивалентности функций $f: T \rightarrow X$ таких, что существует фундаментальная последовательность $\{f_n\} \subset V_\varphi$ такая, что

$$\mu\left(\left\{t \in T : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)\right\}\right) = \mu(T),$$

с расстоянием

$$\rho_\varphi(f, g) = \int_T \varphi(\|f - g\|_X) \, dt.$$

Будем говорить, что последовательность $\{f_n\} \subset L_\varphi(T)$ сходится к $f \in L_\varphi(T)$ по φ -расстоянию, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \rho_\varphi(f_n, f) < \varepsilon$. Множество $E \subset L_\varphi(T)$ будем называть замкнутым, если предел любой последовательности $\{f_n\} \subset E$, сходящейся по φ -расстоянию, принадлежит E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $a, b: T \rightarrow X$. Интервалом $\llbracket a, b \rrbracket$ в $L_\varphi(T, X)$ назовем

$$\{\bar{f} \in L_\varphi(T, X) : \forall t \in T \ f(t) \in [a(t), b(t)]\}.$$

Множество $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset L_\varphi(T, X)$ назовем интервалом I-го типа, если $f_1, f_2 \in L_\varphi(T)$. Если $X = \mathbb{R}$, f_1, f_2 измеримые, то $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ назовем интервалом II-го типа. Множество $M \subset L_\varphi(T, X)$ назовем промежутком, если $\forall \bar{f}_1, \bar{f}_2 \in M \ \llbracket f_1, f_2 \rrbracket \subset M$.

Пусть $F: T \rightarrow 2^X$, $\forall t \in T \ F(t)$ – выпуклое замкнутое множество. Через S_F обозначим множество $\{\bar{f} \in L_\varphi(T, X) : \forall t \in T \ f(t) \in F(t)\}$. При этом отметим, что S_F является замкнутым промежутком, поэтому для него выполняются теоремы 6–7.

Следующее утверждение дает ответ на вопрос о структуре замкнутых промежутков в $C(T, \mathbb{R})$ и $L_\varphi(T, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 1. Множество $M \subset C(T, \mathbb{R})$ ($M \subset L_\varphi(T, \mathbb{R})$) является непустым замкнутым промежутком тогда и только тогда, когда M является интервалом II-го типа.

Исследование аппроксимативных свойств замкнутых промежутков в $C(T, X)$ сводится к исследованию аппроксимативных свойств множеств S_F , так как выполняется

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы множество являлось непустым замкнутым промежутком в $C(T, X)$, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с множеством S_F для некоторого полунепрерывного снизу отображения $F: T \rightarrow 2^X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть E – множество с введенным на нем расстоянием $\rho: E \rightarrow [0, +\infty)$, $M_1 \subset E$, $M_2 \subset E$. Хаусдорфовым расстоянием между M_1 и M_2 называется величина

$$h(M_1, M_2) = \max \left(\sup_{x \in M_1} \inf_{y \in M_2} \rho(x, y), \sup_{x \in M_2} \inf_{y \in M_1} \rho(x, y) \right).$$

Отображение $F: T \rightarrow 2^E$ (где T – топологическое пространство) называется непрерывным, если $\forall t \in T, \forall \varepsilon > 0 \exists O(t): \forall t' \in O(t) \ h(F(t), F(t')) < \varepsilon$ (где $O(t)$ – окрестность точки t).

Следующие утверждения дают ответ на вопросы о существовании наилучшего приближения, его единственности и его устойчивости в случае приближения замкнутыми промежутками в $C(T, X)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F: T \rightarrow 2^X$ – непрерывное отображение такое, что $\forall t \in T \ F(t)$ – выпуклое замкнутое множество. Тогда существует выборка $p: C(T, X) \rightarrow S_F$ из метрического проектора, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1.

Отметим, что от условия непрерывности отображения F избавиться нельзя.

ТЕОРЕМА 4. Если множество S_F непусто, то оно является множеством существования в $C(T, X)$ (но не обязательно является чебышевским).

Следующее утверждение исследует устойчивость метрического проектора на S_F в пространстве $C(T, X)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $P: C(T, X) \rightarrow 2^{S_F}$ – метрический проектор на S_F . Тогда $\forall f_1, f_2 \in C(T)$ выполнено

$$h(P(f_1), P(f_2)) \leq 2 \left(\max(\rho(f_1, S_F), \rho(f_2, S_F)) \|f_1 - f_2\| + \|f_1 - f_2\|^2 \right)^{1/2}.$$

Если $X = \mathbb{R}$, то метрический проектор на S_F удовлетворяет условию Липшица с константой 2.

Следующие утверждения дают ответ на вопросы о существовании наилучшего приближения, его единственности и его устойчивости в случае приближения замкнутыми промежутками в $L_\varphi(T, X)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть M – непустой замкнутый промежуток в $L_\varphi(T, X)$. Тогда существует выборка $p: L_\varphi \rightarrow M$ из метрического проектора, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1.

ТЕОРЕМА 7. Если φ строго возрастает на $[0, +\infty)$, то непустой замкнутый промежуток является чебышевским множеством в $L_\varphi(T, X)$, а метрический проектор на него удовлетворяет условию Липшица с константой 1. Если φ нестрого возрастает на $[0, +\infty)$, то существует непустой замкнутый промежуток такой, что метрический проектор на него разрывен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Franchetti C., Cheney E.W. // J. Approx. Theory. 1986. V. 48. № 2. P. 213–223.
2. Кадец М. В., Замятин В. Н. // Теория функций, функциональный анализ и приложения. 1968. № 7. С. 20–26.
3. Matuszewska W. // Bull. Acad. Polon. Ser. Math. 1960. V. 8. № 6. P. 349–353.
4. Ульянов П. Л. // УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 3–52.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.05.2002