Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Хапаев, К вопросу построения решений в некоррект-

ной нелинейной сингулярно возмущенной задаче для уравнения эллиптического типа, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 17:53:19

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ В НЕКОРРЕКТНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

М. М. Хапаев

Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную задачу:

$$\varepsilon^2 \Delta u = f(u, x), \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, Δ – оператор Лапласа с краевыми условиями

$$u|_{\partial D} = 0 \quad (\text{первая краевая задача}) \quad (2)$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0 \quad (\text{вторая краевая задача}). \quad (3)$$

Пусть уравнение

$$f(u, x) = 0 \quad (4)$$

имеет корни

$$u = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Будем предполагать, что для задачи (1), (2) или (1), (3) известна функция источника $G(x, y)$. Считая $f(u, x)$ правой частью в уравнении Пуассона, запишем через функцию источника $G(x, y)$ с известными свойствами уравнение второго рода для $u(x, \varepsilon)$:

$$-\int_D G(x, y)f(u(y), y) d\tau_y = \varepsilon^2 u(x, \varepsilon). \quad (6)$$

Предельный образ – нелинейное уравнение первого рода с нулевой правой частью – имеет вид

$$\int_D G(x, y)f(u(y), y) d\tau_y = 0, \quad (7)$$

т.е. предельная задача некорректна [1]. Если уравнение $f(u(y), y) = 0$ имеет корни (5), то они являются точными решениями уравнения первого рода (7), в этом легко убедиться подстановкой. Эти решения принадлежат некоторому компакту M .

Решения уравнения (6) будем искать в классе непрерывных ограниченных функций. Правую часть $\varepsilon^2 u(x, \varepsilon)$ в уравнении второго рода (6) в связи с наличием малого параметра будем считать правой частью в уравнении первого рода (7). Если $u(x, \varepsilon)$ считается ограниченной, то правая часть $\varepsilon^2 u(x, \varepsilon)$ может быть сделана сколь угодно малой. Применим теорему 2.1.3 из [2, с. 27]. Теорема относится к уравнению

$$Az = v, \quad (8)$$

где A – непрерывный оператор. Предполагается, что для точной правой части $\bar{v}$ уравнение (8) имеет единственное решение $\bar{z}$, принадлежащее компакту M . Предполагается, что точная правая часть неизвестна, а вместо нее задана приближенная правая часть v_δ . Тогда, если $\|v_\delta - \bar{v}\| \rightarrow 0$, то и $\sup_{Z_k^\delta} \|z - \bar{z}\| \rightarrow 0$, где Z_k^δ – множество квазирешений на компакте M . Применение теоремы оказывается возможным в связи с сингулярной возмущенностью задачи.

Остановимся теперь на условиях на функцию $f(u, x)$ и корни (5) в уравнении (1), при которых существует ограниченное квазирешение уравнения (6). Корни (5) разделим на два класса: нечетные корни $\varphi_1(x), \varphi_3(x), \dots$, на которых с ростом u функция $f(u, x)$ меняет знак с минуса на плюс, и четные корни $\varphi_2(x), \dots$, на которых с ростом u функция $f(u, x)$ меняет знак с плюса на минус.

Рассмотрим вначале четные корни, начиная с $\varphi_2(x)$: пусть имеется некоторое решение (6) вида $\varphi_2(x) + \delta u$ и δu положительно, функция $G(x, y)$ из (6), как известно, положительна. Перемена знака $f(u, x)$ такова, что $f(u, x) < 0$ выше корня $\varphi_2(x)$ и интеграл в (6) положителен, правая часть $\varepsilon^2 u(x, \varepsilon) = \varepsilon^2(\varphi_2(x) + \delta u)$ при достаточно большом δu также положительна; это означает, что в этом случае уравнение (6) может иметь неограниченное решение. Для отрицательного δu справедливо то же самое рассуждение.

Рассмотрим нечетные корни. Как и выше, рассматривается решение вида $\varphi_2(x) + \delta u$, но теперь в связи с другой переменной знака функции $f(u, x)$ на корне $\varphi_1(x)$ при достаточно большом δu в уравнении (6) слева и справа получаются величины разных знаков. Это означает, что в этом случае квазирешения в составе Z_k^δ ограничены и, следовательно, принадлежат компакту, т.е. применима теорема 2.1.3 из [2].

Рассмотрим теперь задачу (2) для уравнения (1). Эта задача содержит нулевое граничное условие, в то время как предельное уравнение имеет решение $u = \varphi_i(x)$. Выберем нечетный корень $\varphi_1(x)$. Имеется отклонение $u = \varphi_1(x)$ от нулевого граничного условия. Проведем сопряжение поверхности $\varphi_1(x)$ с нулевым граничным условием с помощью погранслоевых функций. Для этого сделаем локальную замену переменных, из которых одну, а именно, переменную ξ , направим по нормали к границе ∂D области. В плоскости ξ, u уравнение (1) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение, для которого корень $\varphi_1(x)$ является особой точкой типа седла с двумя показателями λ_1 и λ_2 разных знаков [3]. Выбрав показатель нужного знака, построим погранслоевую функцию $\Pi(x, \varepsilon, t)$ типа $c(x) \exp(\lambda/\varepsilon)$ по всей границе ∂D . Таким образом, предлагается построить решение интегрального уравнения (6) с граничным условием (2) в виде суммы

$$u = \varphi_1(x) + \Pi(x, \varepsilon, t). \quad (9)$$

Погранслойная функция $\Pi(x, \varepsilon, t)$ отличается от нуля только в приграничной полосе ∂D_ε ширины ε . Кроме того,

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \Pi(x, \varepsilon, t) d\xi = O(\varepsilon). \quad (10)$$

Тем самым показано, что

$$\int_D G(x, y) f(\varphi_1(x) + \Pi(x, \varepsilon, t), y) d\tau y = O(\varepsilon^2). \quad (11)$$

Правая часть в (6) тоже имеет этот же порядок $O(\varepsilon^2)$. Следовательно, невязка в уравнении (6) имеет порядок ε^2 и выбором достаточно малого ε может быть сделана сколь угодно малой.

Изучим теперь возможность перехода решения с одного нечетного корня на другой нечетный корень внутри области, т.е. вопрос образования и существования так называемых “контрастных структур” (см. обзорную статью [3]). Для этого проведем внутри области D некоторую гладкую кривую C (не обязательно замкнутую). Выберем два нечетных корня $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$; между ними расположен четный корень $\varphi_2(x)$. “Контрастную структуру” будем строить, ориентируя ее на выбранную кривую C . Вблизи нее с помощью погранслошных функций осуществим переход от корня $\varphi_1(x)$ к корню $\varphi_3(x)$ с пересечением корня $\varphi_2(x)$. Обоснование, проведенное выше, применимо и в этом случае, невязка в уравнении (6) также будет иметь порядок ε^2 . Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть у уравнения (4) имеется два нечетных корня и между ними один четный корень. Тогда сингулярно возмущенная некорректная задача (1), (2) имеет решение с граничными и внутренними слоями вида (9).

Заметим, что построенное решение зависит от выбора кривой C , т.е. не единственно, это как раз и характерно для некорректных задач. Требуются какие-то дополнительные условия для выделения единственного решения. Требование непрерывности производной решения [3] выделяет единственное решение. Однако его вряд ли можно признать эффективным, если задача рассматривается как некорректная.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Московского ун-та, 1994.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. // Фундаментальная и прикладная матем. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.04.2002