Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Лапин, А. М. Филимонов, Смешанная задача для сингулярной квазилинейной гиперболической системы с одной пространственной переменной, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 315–318

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:11:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д. С. Лапин, А. М. Филимонов

Гиперболические уравнения обычно интерпретируются как математические модели процессов, имеющих конечную скорость распространения возмущений. С формальной точки зрения это соответствует тому, что характеристики соответствующих уравнений и систем не перпендикулярны оси времени. Тем не менее, в некоторых физических задачах (см., например, [1]) встречаются математические модели в виде систем уравнений с частными производными, которые по своему типу являются гиперболическими, однако часть их семейств характеристик перпендикулярна оси времени. Такие гиперболические уравнения и системы, у которых часть характеристик перпендикулярна оси времени, будем называть *сингулярными*. Эти уравнения и системы можно интерпретировать, как математические модели одномерных сред, в которых часть возмущений распространяется с ограниченными скоростями, а часть – с бесконечными. С физической точки зрения речь идет о таких средах, в которых имеются два типа возмущений: “медленные” (например, механические), и “быстрые” (например, электромагнитные). Примером задачи, в которой возникают уравнения с характеристиками, перпендикулярными оси времени (для краткости, в дальнейшем будем называть такие характеристики *горизонтальными*), может служить задача о распространении сферически симметричных ионно-звуковых волн в немагнитной плазме (см., например, [2]). Другие примеры уравнений с такими семействами характеристик возникают при использовании реологических моделей, применяемых, в частности, при изучении распространения возмущений в земной коре. Кроме того, такие уравнения могут возникать не в качестве исходных математических моделей, а как промежуточные уравнения, получающиеся при анализе других задач, например, многомерных. Примером может служить задача о двумерных малых колебаниях стратифицированной жидкости, текущей с постоянной скоростью перпендикулярно направлению стратификации, или трехмерная задача о движении жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью и текущей вдоль оси вращения [2].

Постановка задач для таких сингулярных систем также имеет свои особенности, поскольку ось x в данном случае принадлежит характеристическому семейству. Однако, в физических задачах (см., например, [1]) для уравнений, обладающих такими семействами характеристик, роль линий, на которых задаются “начальные” условия, обычно выполняют некоторые кривые, не касающиеся горизонтальных характеристик. Это приводит к тому, что начальным многообразием для таких задач является своеобразная “гребенка”, на основании ($t = 0$) и боковых сторонах ($x = 0$, $x = \ell$) которой задаются условия для несингулярной части системы, а на ее внутренних “зубцах”, которые мы будем называть *внутренними границами*, задаются условия для сингулярной части системы. Отметим, что иногда сами эти внутренние границы также оказываются неизвестными и подлежат определению вместе с решением системы. При этом на этих неизвестных внутренних границах не предполагается скачков решений или их производных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00683.

В нашей работе рассматривается вопрос о локальном существовании и единственности решений задач для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений, а также обсуждается вопрос о взаимосвязи таких систем с системами, часть характеристик которых близка к горизонтальным.

В прямоугольнике $\Pi(T_0) = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq T_0; 0 \leq x \leq \ell\}$ рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t, u, v) \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x, t, u, v), & i = 1, \dots, m, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x} = q_j(x, t, u, v), & j = 1, \dots, n, \\ u = (u_1, \dots, u_m), & v = (v_1, \dots, v_n). \end{cases} \quad (1)$$

Для несингулярной части системы (1) поставим начальные и краевые условия

$$u_i|_{t=0} = \alpha_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u_i|_{x=0} = \gamma_i^0(t, u(0, t)), \quad i \in I_+^0 = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(0, 0, 0, 0)) = 1\}, \quad (3)$$

$$u_i|_{x=\ell} = \gamma_i^\ell(t, u(\ell, t)), \quad i \in I_-^\ell = \{i \mid \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, 0, 0, 0)) = -1\}. \quad (4)$$

Для сингулярной части системы (1) поставим условие

$$v_j|_{x=s_j(t)} = \beta_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $s_j(t)$ – неизвестные внутренние границы, определяемые из уравнения

$$s'_j = r_j(t, s(t), u(s_j(t), t), v(s_j(t), t)), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

с заданными функциями r_j и начальными условиями

$$s_j(0) = c_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \leq c_j \leq \ell, \quad (7)$$

где $c_j, j = 1, \dots, n$, так же считаются известными.

Предположим, что заданные функции, входящие в уравнения (1) и (6), а также в начальные и краевые условия, липшицевы (это условие можно ослабить). Предположим так же выполнение условий согласования нулевого порядка. Пусть функции $q_j, j = 1, \dots, n$, не зависят от тех v_k , для которых $c_k \neq c_j$. Пусть существует неотрицательная непрерывная функция $M(\tau)$ такая, что выполнены неравенства

$$|q_j(x, t, u, v)| \leq M(x)(1 + |v|), \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $r_j(t, 0, u, v) \geq 0$ при $c_j = 0$, а при $c_j = \ell$ пусть $r_j(t, \ell, u, v) \leq 0$ для $j = 1, \dots, n$. Предположим также, что $\gamma_i^0, i \in I_+^0$, не зависит от тех u_k , для которых $k \in I_+^0$, а $\gamma_i^\ell, i \in I_-^\ell$, не зависит от тех u_k , для которых $k \in I_-^\ell$; и наконец, предположим, что

$$\operatorname{sgn}(\lambda_i(0, t, u, v)) = \operatorname{const}, \quad \operatorname{sgn}(\lambda_i(\ell, t, u, v)) = \operatorname{const}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Решение задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= \lambda_i(x, t, u(x, t), v(x, t)), & i &= 1, \dots, m, \\ x(\check{t}) &= \check{x}, \end{aligned}$$

назовем *характеристикой* i -го семейства, соответствующей паре $\{u, v\}$. Характеристиками для вырожденной части системы (1) служат прямые, параллельные оси x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным непрерывным решением задачи (1)–(7) назовем липшицево решение системы интегро-операторных уравнений, получающейся из (1) путем интегрирования вдоль соответствующих характеристик.*

ТЕОРЕМА 1. При выполнении приведенных выше условий существует и единственно обобщенное непрерывное решение задачи (1)–(7) для некоторого достаточно малого $T \in (0, T_0]$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Доказательство теоремы строится по схеме, предложенной в [3], однако, наличие сингулярной группы уравнений в (1) привело к необходимости существенных изменений. Эти изменения вызваны нелокальным характером построения решения по пространственной переменной. В свою очередь, это потребовало введения некоторых функциональных пространств, норма в которых определяется с помощью специально подобранных весовых функций. Затем рассматривается оператор $\mathfrak{S}$, определяемый по правой части соответствующей системы интегро-операторных уравнений, и используется теорема о неподвижной точке, причем сжимающей оказывается вторая степень этого оператора. Мы не приводим здесь подробного доказательства ввиду его большой громоздкости.

Отметим только, что доказательство, использующее принцип сжимающих отображений, можно рассматривать, как обоснование метода последовательных приближений. Это позволяет использовать соответствующую процедуру для построения приближенного решения. Далее мы проиллюстрируем это на конкретном примере одной задачи, возникающей в физике твердого тела.

В работе [1] была предложена математическая модель распространения ионов примеси в одномерной кристаллической решетке под действием сильного электрического поля. После соответствующих преобразований в первом приближении (в безразмерных переменных) соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \operatorname{sh} E \frac{\partial u}{\partial x} = -bpu^2 \operatorname{ch} E, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = pu, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -qE. \quad (8)$$

Здесь неизвестными являются функции: u – концентрация ионов примеси, E – напряженность электрического поля, φ – потенциал. Константы b, p, q считаются заданными. Начальные и краевые условия для этой системы имеют вид

$$\varphi(0, t) = \varphi_0, \quad E(\ell(t), t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (9)$$

где $\ell(t)$ – неизвестная внутренняя граница, определяемая из уравнения

$$\ell'(t) = -\frac{b}{u(\ell(t), t)\ell(t)} \int_0^{\ell(t)} u \operatorname{sh} E dx, \quad \ell(0) = \ell_0.$$

В качестве нулевого приближения возьмем функции

$$u^{(0)}(x, t) = u_0, \quad \varphi^{(0)}(x, t) = \varphi_0, \quad \ell^{(0)}(t) = \ell_0, \quad E^{(0)}(x, t) = u_0 p(x - \ell_0), \quad (10)$$

где u_0, φ_0, ℓ_0 – константы. Интегрируя второе и третье уравнения системы (8) вдоль горизонтальных характеристик, можно найти первые приближения $E^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$:

$$E^{(1)}(x, t) = u_0 p(x - \ell_0), \quad \varphi^{(1)}(x, t) = -u_0 p q \frac{x^2}{2} + u_0 p q \ell_0 x + \varphi_0.$$

Тогда уравнение характеристик для первого уравнения в (8) приобретает вид $\dot{x} = b \operatorname{sh}(u_0 p(x - \ell_0))$. Это позволяет найти первые приближения $u^{(1)}$ и $\ell^{(1)}$:

$$u^{(1)}(x, t) = u_0 - u_0 \ln \left(\operatorname{sh}(u_0 p(\ell_0 - x)) \operatorname{sh} \left(b p u_0 t - \ln \left(\frac{1 - e^{u_0 p(x - \ell_0)}}{1 + e^{u_0 p(x - \ell_0)}} \right) \right) \right), \quad 0 \leq x < \ell_0, \\ \ell^{(1)}(t) = \frac{b(\operatorname{ch}(u_0 p \ell_0) - 1)}{u_0 p \ell_0} t + \ell_0.$$

Обсудим теперь связь решений систем вида (1) с системами без вырождения, а именно, наряду с задачами (1)–(7), в которой предполагается, что все $s_j(t; w)$ совпадают с левой границей $x = 0$, рассмотрим в прямоугольнике $\Pi(T_0)$ систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \ddot{u}_i}{\partial t} + \lambda_i(x, t, \ddot{u}, \ddot{v}) \frac{\partial \ddot{u}_i}{\partial x} = f_i(x, t, \ddot{u}, \ddot{v}), & i = 1, \dots, m, \\ \varepsilon \mu_j(x, t, \ddot{u}, \ddot{v}) \frac{\partial \ddot{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \ddot{v}_j}{\partial x} = q_j(x, t, \ddot{u}, \ddot{v}), & j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (11)$$

с начальными и краевыми условиями вида, аналогичного (2)–(4). Здесь $\mu_j(x, t, \ddot{u}, \ddot{v}) > M_0 > 0$, а $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр, так что при $\varepsilon = 0$ получается система (1). Можно показать, что прямоугольник $\Pi(T_0)$ разбивается на области, в некоторых из которых решения вырожденной и невырожденной задач близки, а в сужающейся при $\varepsilon \rightarrow 0+$ области, решение $\ddot{v}_j(x, t)$ содержит погранслойные функции. Это демонстрирует возможность возникновения эффекта пограничного слоя при переходе от невырожденных систем квазилинейных гиперболических уравнений к сингулярным системам.

Наконец, отметим, что в нашем случаемалый параметр во второй группе уравнений системы (11) стоит только перед производными по времени (а не перед всеми производными), так что сингулярная часть рассматриваемой системы фактически представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно пространственной переменной. Время t входит в эту часть системы как параметр. Ранее подобный подход рассматривался только для полулинейных уравнений [4]. Для квазилинейных уравнений ранее рассматривался случай, в котором малый параметр стоял перед всеми производными [5], так что сингулярная часть системы представляла собой систему алгебраических (не дифференциальных) уравнений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верещагин И. К., Кокин С. М., Селезнев В. А. // Изв. АН СССР. Сер. физика. 1985. Т. 49. № 10. С. 1940–1943.
2. Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998.
3. Мышкис А. Д., Филимонов А. М. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 3. С. 488–500.
4. Мауленов О., Мышкис А. Д. // Изв. АН КазССР. Сер. физ. -матем. 1981. № 3. С. 25–29.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.