Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Э. Ахмедов, Об асимптотическом поведении полуклассических полиномов совместной ортогональности типа Бесселя, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 4, 483–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 07:52:06

Об асимптотическом поведении полуклассических полиномов совместной ортогональности типа Бесселя

Р. Э. Ахмедов

В работе получена асимптотика многочленов Бесселя, равномерная на компактах внутри некоторой области и равномерная на компактных подмножествах некоторых кривых.

Библиография: 17 названий.

1. Введение

Интерес к изучению полиномов совместной ортогональности связан, прежде всего, с тем, что они определяют аппроксимации Эрмита–Паде

$$Q_{\vec{n}}(z)\hat{\sigma}_j(z) - P_{n,j}(z) = O(z^{-n-1}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \vec{n} = (n, \dots, n), \quad j = 1, \dots, s+1,$$

к набору функций марковского типа

$$\hat{\sigma}_j(z) = \int_{\gamma_j} \frac{d\sigma(x)}{x - z}, \quad j = 1, 2, \dots, s+1, \quad (1)$$

которые являются локально наилучшими в бесконечности аппроксимациями с общим знаменателем $Q_{\vec{n}}$. Набор функций (1) является основным объектом при изучении аппроксимаций Эрмита–Паде аналитических функций [1]–[4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Последовательность многочленов $\{Q_{n(s+1)}\}_{n=0}^{\infty}$, где $Q_{n(s+1)} \in \mathcal{P}_{n(s+1)}$ называется *системой полуклассических многочленов совместной ортогональности с индексом $(n, \dots, n)$* , если выполнены $n(s+1)$ соотношений ортогональности

$$\int_{\gamma_j} Q_{n(s+1)}(z) z^{\nu} w(z) dz = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, s+1, \quad (2)$$

с весовой функцией $w(z)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению Пирсона

$$(\phi(z)w(z))' + \psi(z)w(z) = 0, \quad (3)$$

где ϕ и ψ – многочлены степени не выше $s+2$ и $s+1$ соответственно, при этом граничные условия

$$\phi(z)w(z)z^{\nu}|_{\gamma_j} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, s+1, \quad (4)$$

определяют контуры интегрирования $\{\gamma_j\}_{j=1}^{s+1}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Случай $s = 0$ соответствует классическим ортогональным многочленам (Якоби, Лагерра, Эрмита и Бесселя [5], [6]). Здесь мы будем рассматривать случай $s = 1$. В работе [7] дана классификация 7 полуклассических весов, которые определяются взаимным расположением особых точек уравнения Пирсона (3):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \text{(J-J)} \quad \phi(z) = z(z - a_1)(z - a_2), \quad w(z) = z^{\alpha_0}(z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2}, \\
 \text{(b)} & \text{(J-B)} \quad \phi(z) = z^2(z - a), \quad w(z) = z^{\alpha_0}(z - a)^{\alpha_1}e^{\gamma/z}, \\
 \text{(c)} & \text{(J-L)} \quad \phi(z) = z(z - a), \quad w(z) = z^{\alpha_0}(z - a)^{\alpha_1}e^{\beta z}, \\
 \text{(d)} & \text{(B-B)} \quad \phi(z) = z^3, \quad w(z) = z^{\alpha} \exp\left\{\frac{\gamma_1}{z^2} + \frac{\gamma_2}{z}\right\}, \\
 \text{(e)} & \text{(B-L)} \quad \phi(z) = z^2, \quad w(z) = z^{\alpha}e^{\beta z}e^{\gamma/z}, \\
 \text{(f)} & \text{(L-H)} \quad \phi(z) = z, \quad w(z) = z^{\alpha} \exp\{\beta_1 z^2 + \beta_2 z\}, \\
 \text{(g)} & \text{(H-H)} \quad \phi(z) = \text{const}, \quad w(z) = \exp\{\beta_1 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z\}.
 \end{array} \quad (5)$$

Соответствующие многочлены совместной ортогональности называются многочленами Якоби–Якоби (J–J), Якоби–Бесселя (J–B) и т.д.

Общей характеристикой многочленов (2), (3), (4) (класса $s = 1$) является формула Родрига:

$$Q_{2n}(z) = \frac{1}{w(z)} \frac{d^n}{dz^n} [\phi^n(z)w(z)]. \quad (6)$$

Частный случай полиномов J–J с весовой функцией $w(z) = \text{const}$ был рассмотрен в работе Аппеля [8] в связи с обобщением формулы Родрига для полиномов Лежандра, а также в работах [9], [10]. В 1979 г. Калягиным [11] доказаны формулы сильной асимптотики для полиномов J–J в случае, когда в (5) $a_1 = -a_2 = a$, $\gamma_1 = [-a, 0]$, $\gamma_2 = [0, a]$ (см. также [12]). Полиномы J–B рассматривались в работе [12]. Сорокин (см. [13]–[16]) изучал формальные и аналитические свойства полиномов J–L (для случая $a < 0, \beta < 0$), а также полиномы L–H и H–H.

В настоящей работе мы изучим асимптотику многочленов Бесселя–Бесселя (B–B). Для краткости будем называть их просто *многочленами Бесселя*. Эти многочлены, $\{Q_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$, $Q_{2n} \in \mathcal{P}_{2n}$, удовлетворяют $2n$ соотношениям ортогональности

$$\int_{\gamma_j} Q_{2n}(z) z^{\nu} w(z) dz = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

на двух кривых γ_1 и γ_2 в комплексной плоскости, с весовой функцией

$$w(z) = z^{\alpha} e^{\beta_1/z^2 + \beta_2/z}, \quad (8)$$

а также граничным условиям

$$\phi(z)w(z)z^{\nu}|_{\gamma_j} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \quad \phi(z) = z^3. \quad (9)$$

Для упрощения выкладок рассмотрим случай, когда $w(z) = e^{1/z^2}$. Рассмотрение общего случая носит технический характер и принципиальных трудностей не вызывает. Учитывая (9), находим, что кривые ортогональности γ_1 и γ_2 должны иметь вид, приведенный на рис. 1. Здесь γ_1 – жорданова замкнутая кривая, выхо-

Рис. 1

дующая из точки 0 и имеющая в этой точке вертикальную касательную, γ_2 – кривая, симметричная кривой γ_1 относительно мнимой оси.

Основной результат работы (формулы сильной асимптотики) содержится в теореме 2.5.

2. Асимптотические свойства полиномов Бесселя

Для нахождения асимптотики многочленов Q_{2n} , удовлетворяющих соотношениям (7)–(9), применим метод Дарбу [17], [6], [5]. Будем использовать производящую функцию для $Q_{2n}(x)$

$$F(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{2n}(x)}{n!} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad (10)$$

а также производящую функцию $F_*(z; x)$, построенную для полиномов $Q_{2n}^*(x)$,

$$Q_{2n}^*(x) = Q_{2n}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right). \quad (11)$$

При этом нормировку многочленов $Q_{2n}(x)$ следует выбирать таким образом, чтобы после перехода от Q_{2n} к Q_{2n}^* выполнялось равенство

$$Q_{2n}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = Q_{2n}^*(x) = \frac{1}{n!} e^{-n/x^2} \frac{d^n}{dx^n} [x^{3n} e^{n/x^2}]. \quad (12)$$

2.1. Выражение для производящей функции $F_*(z; x)$. Прежде всего, найдем представление производящей функции через некоторую трансцендентную функцию, которую затем будем исследовать.

ТЕОРЕМА 2.1. *Производящая функция $F_*(z; x)$ (см. (10), (11)) для многочленов Бесселя (см. (7)–(9)), может быть представлена в следующем виде:*

$$F_*(z; x) = \frac{1}{z - (3t_\star^2 - 2) \exp(1/t_\star^2 - 1/x^2)}, \quad (13)$$

где $t_\star = t_\star(z)$ есть ветвь многозначной аналитической функции $t(z)$:

$$t^3 e^{1/t^2 - 1/x^2} - z(t - x) = 0, \quad (14)$$

причем $t_\star(z) \rightarrow x$, когда $z \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $F_*(z; x)$ имеем

$$F_*(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}^*(x) \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-n/x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^{3n} e^{n/x^2}) \frac{1}{z^{n+1}};$$

далее, из формулы Родрига (6) с помощью интеграла Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^{3n} e^{n/x^2}) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{t^{3n} e^{n/t^2}}{(t-x)^{n+1}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{-1/t^2}}{t^3} \left(\frac{t^3 e^{1/t^2}}{t-x} \right)^{n+1} dt, \\ F_*(z; x) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/x^2} z^{-n-1} \int_{\Gamma} \frac{e^{-1/t^2}}{t^3} \left(\frac{t^3 e^{1/t^2}}{t-x} \right)^{n+1} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{1/x^2-1/t^2}}{t^3} \left(\frac{t^3 e^{1/t^2-1/x^2}}{z(t-x)} \right)^{n+1} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь Γ — замкнутый контур, охватывающий точку x и не охватывающий точку 0. Так как при z достаточно большом по модулю имеем

$$\left| \frac{t^3 e^{1/t^2-1/x^2}}{z(t-x)} \right| \leq q < 1, \quad t \in \Gamma,$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t^3 e^{1/t^2-1/x^2}}{z(t-x)} \right)^{n+1} = \frac{t^3 e^{1/t^2-1/x^2}}{z(t-x) - t^3 e^{1/t^2-1/x^2}}$$

сходится равномерно на Γ . Меняя теперь в (15) порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$F_*(z; x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dt}{z(t-x) - t^3 e^{1/t^2-1/x^2}}. \quad (16)$$

Так как для достаточно больших по модулю z отображение

$$\varphi(t) = x + \frac{t^3 e^{1/t^2-1/x^2}}{z}$$

является сжимающим, то уравнение $\varphi(t) = t$, а следовательно, и (14) имеют единственный корень $t_* = t_*(z)$ внутри Γ и этот корень простой. Теперь по теореме о вычетах, из (16) получаем (13).

2.2. Особые точки производящей функции $F_*(z; x)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Производящая функция $F_*(z; x)$ (см. (10), (11)) имеет в комплексной плоскости 3 особых точки $z_j = z_j(x)$:

$$\begin{cases} z_j(x) = (3t_j^2(x) - 2)e^{1/t_j^2(x)-1/x^2}, \\ t_j(x) = \frac{x}{2} + u_j(x) + v_j(x), \\ u_j(x) = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x}{4} - \frac{i}{\sqrt{432}} \sqrt{54x^4 + 9x^2 + 16} \right)^{1/3}, \\ v_j(x) = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x}{4} + \frac{i}{\sqrt{432}} \sqrt{54x^4 + 9x^2 + 16} \right)^{1/3}, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3; \quad (17)$$

в последних двух равенствах выбирается та ветвь функции $\sqrt{\zeta}$, для которой $\sqrt{\zeta} > 0$ при $\zeta > 0$, и ветви кубического корня такие, что

$$u_j(x)v_j(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особые точки функции $t_*(z)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} z(t-x) - t^3 e^{1/t^2 - 1/x^2} = 0, \\ z - (3t^2 - 2)e^{1/t^2 - 1/x^2} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} z &= (3t^2 - 2)e^{1/t^2 - 1/x^2}, \\ -t^3 + (3t^2 - 2)(t-x) &= 0. \end{aligned}$$

Это дает нам первую из формул (17), а $t_j = t_j(x)$ есть корни кубического уравнения

$$t^3 - \frac{3}{2}xt^2 - t + x = 0. \quad (19)$$

Представляя теперь $t_j(x)$ в виде $t_j(x) = x/2 + u_j(x) + v_j(x)$, находим по формулам Кардано выражения для $u_j(x)$ и $v_j(x)$ в (17).

Исследуем характер особых точек $z_j(x)$ функции $F_*(z; x)$. Будем искать $t_*(z)$ в виде суммы

$$t_*(z) = t_1(x) + c_0\theta^\alpha + r_1(\theta), \quad r_1(\theta)\theta^{-\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow 0, \quad (20)$$

где $\theta = 1 - z_1(x)/z$. Имеем

$$t_*^3(z) = t_1^3 + 3t_1^2(c_0\theta^\alpha + r_1(\theta)) + 3t_1c_0^2\theta^{2\alpha} + o(\theta^{2\alpha}),$$

и далее, так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} e^{1/(t_1+y)^2}(0) &= -\frac{2}{t_1^3} e^{1/t_1^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{1/(t_1+y)^2}(0) = \left(\frac{4}{t_1^6} + \frac{6}{t_1^4}\right) e^{1/t_1^2}; \\ \exp\left\{\frac{1}{t_*^2} - \frac{1}{x^2}\right\} &= \exp\left\{\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{x^2}\right\} \left\{1 - \frac{2}{t_1^3}(c_0\theta^\alpha + r_1(\theta)) + \left(\frac{2}{t_1^6} + \frac{3}{t_1^4}\right)c_0^2\theta^{2\alpha} + o(\theta^{2\alpha})\right\}, \end{aligned}$$

то после подстановки этих разложений в (14) получаем

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{1}{t_*^2} - \frac{1}{x^2}\right\} &\left\{t_1^3 + (3t_1^2 - 2)(c_0\theta^\alpha + r_1(\theta)) + \left(3t_1 - \frac{3}{t_1} + \frac{2}{t_1^3}\right)c_0^2\theta^{2\alpha} + o(\theta^{2\alpha})\right\} \\ &= z_1(x)(t_1 - x + c_0\theta^\alpha + r_1(\theta) + (t_1 - x)\theta + o(\theta^\beta)), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\beta = \min(\alpha, 1)$. Поскольку $z_1(x)$ и $t_1(x)$ удовлетворяют (18), находим, что (21) будет выполнено, если $\alpha = 1/2$. При этом остаточный член в правой части (21) будет иметь порядок $o(\theta^{2\alpha})$, а c_0 удовлетворяет соотношению

$$c_0^2 \left(3t_1 - \frac{3}{t_1} + \frac{2}{t_1^3}\right) e^{1/t_1^2 - 1/x^2} = z_1(x)(t - x).$$

Опять с учетом (18) это дает

$$c_0 = t_1^3(3t_1^4 - 3t_1^2 + 2)^{-1/2}. \quad (22)$$

Выражение (13) для производящей функции можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} F_\star(z; x) &= \frac{t_\star - x}{z(t_\star - x) - (3t_\star^2 - x)(t_\star - x) \exp\{1/t_\star^2 - 1/x^2\}} \\ &= \frac{t_\star - x}{\exp\{1/t_\star^2 - 1/x^2\} - 2t_\star^3 + 3t_\star^2 x + 2t_\star - 2x} \\ &= -\frac{1}{2z} \frac{1}{(1 - t_1(x)/t_\star(z))(1 - t_2(x)/t_\star(z))(1 - t_3(x)/t_\star(z))}. \end{aligned} \quad (23)$$

Соответственно, для всех x таких, что $x \neq 0$ и $54x^4 + 9x^2 + 16 \neq 0$, будем иметь из (23)

$$F_\star(z; x) = A_1(x) \left(1 - \frac{z_1(x)}{z}\right)^{-1/2} + o(1), \quad z \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_1), \quad (24)$$

где

$$A_1(x) = -\frac{1}{2z_1(x)} \frac{t_1(x)}{c_0} \frac{1}{(1 - t_2(x)/t_1(x))(1 - t_3(x)/t_1(x))}, \quad (25)$$

и c_0 определено в (22).

2.3. Кривые равных модулей $\Gamma = \{x : |z_j(x)| = |z_k(x)|\}$. Определим для каждого $x \in \mathbb{C}$ те особые точки $z_j(x)$ производящей функции, которые имеют наибольший модуль. Нам понадобится следующая

ЛЕММА 2.3. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в единичном круге и

$$f(z) = 1 + a_\nu z^\nu + \dots$$

– ее ряд Тейлора, причем $a_\nu \neq 0$. Тогда число кривых γ , выходящих из точки 0 и таких, что $|f(z)| = 1$, $z \in \gamma$, равно 2ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho < 1$, имеем

$$f(z) = 1 + b_\nu e^{i(\theta\nu + \theta_0)} + \sum_{l=\nu+1}^{\infty} a_\nu e^{i\theta l}, \quad (26)$$

где $b_\nu > 0$. Число ρ выберем исходя из условия

$$\left| \sum_{l=\nu+1}^{\infty} a_\nu e^{i\theta l} \right| < \delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{b_\nu}{2}\right).$$

Отсюда по теореме Руше заключаем, что $N(f(z) - 1) = \nu$. А из (26) следует, что

$$1 - \delta \leq |1 + b_\nu e^{i(\theta\nu + \theta_0)}| \leq 1 + \delta, \quad z \in \gamma,$$

откуда в силу произвольности δ получаем

$$\theta_k = -\frac{\theta_0}{\nu} \pm \arccos\left(-\frac{b_\nu}{2}\right) + \frac{2\pi k}{\nu}, \quad k = 0, 1, \dots, \nu - 1,$$

что и доказывает справедливость леммы.

Рис. 2

Рассмотрим уравнение (19). Обозначим через $u_*(x)$ и $v_*(x)$ те ветви функций

$$u(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{8i}{\sqrt{432}} \frac{\sqrt{54x^4 + 9x^2 + 16}}{x^3}\right)^{1/3},$$

$$v(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{8i}{\sqrt{432}} \frac{\sqrt{54x^4 + 9x^2 + 16}}{x^3}\right)^{1/3},$$

для которых

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_*(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v_*(x) = 1, \quad (27)$$

и пусть $c = e^{2\pi i/3}$. Пусть $t_1 = t_1(x)$ – тот корень (19), который стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$t_1(x) = \frac{x}{2}(1 + u_*(x) + v_*(x)). \quad (28a)$$

Для двух других корней с учетом теоремы Виета и (27) имеем

$$t_2(x) = \frac{x}{2}(1 + cu_*(x) + c^2v_*(x)), \quad t_3(x) = \frac{x}{2}(1 + c^2u_*(x) + cv_*(x)), \quad (28b)$$

при этом $\lim_{x \rightarrow \infty} t_2(x) = \sqrt{2/3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} t_3(x) = -\sqrt{2/3}$.

Функции $t_j(x)$, удовлетворяющие (28a), (28b) – однозначные ветви аналитической функции $t(x)$ (см. (19)) в плоскости с двумя разрезами γ_+ и γ_- , соединяющими пары точек ветвления x_j , $j = 1, \dots, 4$ (рис. 2).

Переписывая (19) в виде

$$x = \frac{2(t^3 - t)}{3t^2 - 2},$$

и анализируя функцию $t(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ (рис. 3, (a)), $x = i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$ (рис. 3, (c)), заключаем, что $|z_2(x)| = |z_3(x)|$, если $\operatorname{Re}(x) = 0$ (рис. 3, (b), (d)).

Поскольку функция $\varphi(x) = z_2(x)/z_3(x)$ представима в окрестности точки 0 в виде

$$\varphi(x) = 1 + a_1x + \dots, \quad a_1 \neq 0,$$

а также учитывая, что

$$t_1^{-2}(x) = \frac{1}{x^2} + c_0 + \dots,$$

с учетом леммы 2.3 получаем 10 кривых равных модулей (в том числе мнимая прямая),

$$\Gamma = \{x : |z_j(x)| = |z_k(x)|\}. \quad (29)$$

Рис. 3

2.4. Описание римановой поверхности функции $z(x)$. Из рассуждений, проведенных в п. 2.3 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Существует единственная точка $x_0 = i\xi_0$, $\xi_0 > 0$, такая, что*

$$|z_1(x_0)| = |z_+(x_0)| = |z_-(x_0)|.$$

Из точки x_0 выходят, как легко видеть, 6 кривых равных модулей (29).

Пусть $\mathfrak{d}$ обозначает замкнутую кривую, состоящую из контуров $\gamma_{\pm}$ и дуг равных модулей Γ' (соответственно Γ''), соединяющих последовательно точки x_+ , x_0 , x_- (соответственно $\bar{x}_+$, $\bar{x}_0$, $\bar{x}_-$), где $x_{\pm}$, $\bar{x}_{\pm}$ – концы контуров $\gamma_{\pm}$.

Рассмотрим области

- $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma_+ \cup \gamma_- \cup \{0\}\}$,
- G_1 – внешность $\mathfrak{d}$,
- $G_{\pm} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\gamma_{\pm} \cup \{0\}\}$.

В области G имеем 3 голоморфные функции – $z_1(x)$, $z_{\pm}(x)$, одна из которых, z_1 , имеет в точке ∞ полюс второго порядка, а две других – простые нули. Вследствие симметрии второго уравнения системы (18) относительно замены $x \rightarrow -x$ имеем

$$z_1(-x) = z_1(x), \quad z_{\pm}(-x) = z_{\mp}(x), \quad x \in G. \quad (30)$$

На разрезе γ_+ происходит склейка z_1 и z_+ , при этом их предельные значения на правом и левом берегах γ_+ комплексно сопряжены. Аналогично склеиваются листы z_1 и z_- , а предельные значения этих функций на правом (левом) берегах γ_- комплексно

сопряжены. При отображении z_1 правый берег γ_+ переходит в некоторую жорданову аналитическую дугу C_+ , а левый берег – в симметричную ей дугу C_- с теми же концами. Следовательно, z_1 осуществляет двулистное отображение области G на внешность кривой $C = C_+ \cup C_-$. Поскольку $|z_+(x)| = |z_1(x)| > |z_-(x)|$, $x \in \gamma_+$, и учитывая (30), с помощью принципа максимума получаем, что

$$|z_{\pm}(x)| < |z_1(x)|, \quad x \in G_1, \quad |z_{\pm}(x)| = |z_1(x)|, \quad x \in \gamma_{\pm}.$$

2.5. Асимптотика многочленов $Q_{2n}^*(x) = Q_{2n}(x/\sqrt{n})$. Будем опираться на следующую общую теорему [6]:

Пусть $h(w)$ – регулярная в круге $\{|w| < 1\}$ функция, имеющая конечное число особенностей

$$e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_l}, \quad e^{i\varphi_\alpha} \neq e^{i\varphi_\beta}, \quad \alpha \neq \beta,$$

на единичной окружности $\{|w| = 1\}$. Пусть

$$h(w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu}^{(k)} (1 - we^{-i\varphi_k})^{a_k + \nu b_k}, \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

в окрестности точки $e^{i\varphi_k}$, $b_k > 0$. Тогда выражение

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^l c_{\nu}^{(k)} \binom{a_k + \nu b_k}{n} (-e^{i\varphi_k})^n, \quad (31)$$

дает асимптотическое разложение для коэффициента при w^n в тейлоровском разложении $h(w)$ в следующем смысле: если Q – произвольное положительное число и если во внешней сумме в (31) взять достаточно большое число членов, то мы получим выражение, которое приближает этот коэффициент с погрешностью $O(n^{-Q})$.

Так как разложения, аналогичные (24), (25) (получающиеся из последних перестановкой индексов), имеют место в $\dot{U}_{\varepsilon}(z_{\pm})$, то мы можем найти первый член в асимптотической формуле (31).

ТЕОРЕМА 2.5. 1. Равномерно по x на компактах области G выполнена оценка

$$Q_{2n}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (z_1(x))^n \left\{ A_1(x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (32)$$

2. Равномерно по x на компактных подмножествах $\gamma_{\pm}$ выполнена оценка

$$Q_{2n}^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \{ A_1(x)(z_1(x))^n + A_{\pm}(x)(z_{\pm}(x))^n \} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Здесь $A_1(x)$ – коэффициент при $(1 - z/z_1(x))^{-1/2}$ в разложении производящей функции $F_*(z; x)$ в точке $z_1(x)$ (см. (25)); для $A_{\pm}(x)$ получаются аналогичные выражения в точках $z_{\pm}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Особые точки $F_*(z; x) - z_j(x)$, $j \in \{1, +, -\}$. Наибольший модуль имеет $z_1(x)$. Обозначая $D := \sqrt{1 - z_1(x)}/z$, видим, что после обхода точки $z_1(x)$ функция $\sqrt{D}$ меняет знак, $\sqrt{D} \rightarrow -\sqrt{D}$. Рассмотрим производящую функцию $F(z; x)$ (см. (10)) для полиномов $Q_{2n}(x)$. Весовая функция этих полиномов имеет вид (8). Для доказательства теоремы нам понадобится

ЛЕММА 2.6. Производящая функция $F(z; x)$ (см. (10)) для системы ортогональных многочленов $Q_{2n}(x)$, удовлетворяющих условиям (7)–(9), может быть представлена в следующем виде:

$$F(z; x) = \frac{w(\tilde{t}_*(z))}{w(x)} \frac{\sqrt{27}}{6i} \frac{\tilde{u}_*(z) - \tilde{v}_*(z)}{z\sqrt{1 - z_1(x)/z}}, \quad (34)$$

где $\tilde{u}_*(z)$ и $\tilde{v}_*(z)$ – ветви многозначных функций

$$\tilde{u}(z) = \left(-\frac{x}{2\sqrt{z}} - \frac{i}{\sqrt{27}} \sqrt{1 - \frac{z_1(x)}{z}} \right)^{1/3}, \quad \tilde{v}(z) = \left(-\frac{x}{2\sqrt{z}} + \frac{i}{\sqrt{27}} \sqrt{1 - \frac{z_1(x)}{z}} \right)^{1/3}, \quad (35)$$

для которых $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{u}_*(z) = i/\sqrt{3}$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{v}_*(z) = -i/\sqrt{3}$. При этом $\tilde{t}_* = \tilde{t}_*(z)$ – ветвь алгебраической функции $t(z)$:

$$t^3 - zt + zx = 0, \quad (36)$$

для которой $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{t}_*(z) = x$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $z_1(x)$, входящая в (35), имеет тот же смысл, что и в теореме 2.5. Это наибольшая по модулю особая точка производящей функции $F(z, x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Применяя ту же схему, что и при доказательстве теоремы 2.1, находим следующее выражение для производящей функции:

$$F(z; x) = \frac{w(\tilde{t}_*(z))}{w(x)(z - 3\tilde{t}_*^2(z))}.$$

Ее особыми точками являются точки

$$z_1 = z_2 = 0, \quad z_3 = \frac{27}{4}x^2,$$

которые находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} z(t - x) - t^3 = 0, \\ z - 3t^2 = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Из (36), (37) с помощью формул Кардано находим

$$\tilde{t}_j(z) = \sqrt{z}(\tilde{u}_j(z) + \tilde{v}_j(z)),$$

где $\tilde{u}_j(z)$, $\tilde{v}_j(z)$ – различные ветви алгебраических функций

$$\tilde{u}(z) = \left(-\frac{x}{2\sqrt{z}} - \frac{i}{\sqrt{27}} \sqrt{1 - \frac{27x^2}{4z}} \right)^{1/3}, \quad \tilde{v}(z) = \left(-\frac{x}{2\sqrt{z}} + \frac{i}{\sqrt{27}} \sqrt{1 - \frac{27x^2}{4z}} \right)^{1/3}.$$

При этом

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{u}_j(z) = \left(-\frac{i}{\sqrt{27}} \right)^{1/3}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{v}_j(z) = \left(\frac{i}{\sqrt{27}} \right)^{1/3},$$

и $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{t}_*(z) = x$, что дает нам (34).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.5 (ПРОДОЛЖЕНИЕ). При обходе точки $z_1(x)$ имеем $\tilde{u}_* \rightarrow c\tilde{v}_*$, $\tilde{v}_* \rightarrow c^2\tilde{u}_*$, где c – некоторый кубический корень из 1. Осуществим аналитическое продолжение $\tilde{u}_*$ вдоль кривой $C^{(\delta)}$, состоящей из отрезка $\{z_1(x)(1+\lambda), \lambda \geq \delta\}$, окружности $\{|z - z_1(x)| = |z_1(x)|\delta\}$ и того же отрезка, проходящего в противоположном направлении (считаем δ достаточно малым положительным числом). Пусть $L^{(\delta)}$ – кривая, которую описывает точка $\tilde{u}_*$, когда z проходит кривую $C^{(\delta)}$, $L(x)$ – предельная кривая при $\delta \rightarrow 0$. Кривая $L(x)$ имеет начало в точке $i/\sqrt{3}$ и конец $-i/\sqrt{3}$. Из аналитического представления кривых $L(x)$, $x \in G$, следует, что все они гомотопны между собой в $\mathbb{C}$.

Далее, $\Delta \arg \sqrt{D} = +\pi$, а новое значение $\tilde{u}_*$ в ∞ равно

$$-\frac{i}{\sqrt{3}}e^{\pi i/3} = c\frac{i}{\sqrt{3}},$$

откуда $c = -e^{\pi i/3}$. Совершая обход вдоль кривой $\{|z_{\pm}(x)| = \text{const}\}$, с учетом непрерывности функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\tilde{v}^3(z))'}{\tilde{v}^3(z)} dz$$

вдоль любой кривой γ , имеющей начало и конец в ∞ , видим, что $z_1(x)$ есть точка ветвления функции $\tilde{t}_*(z)$ для значений x , принадлежащих $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, т.е. $z_1(x)$ – особая точка на границе максимального круга голоморфности $F(z; x)$. Теперь, с помощью леммы 2.6 получим разложение

$$F(z; x) = A(x) \left(1 - \frac{z_1(x)}{z}\right)^{-1/2} + \dots,$$

в проколотой окрестности точки $z_1(x)$, где $A(x)$ – некоторая функция, голоморфная в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, и $A(x) \neq 0$. Функция $\tilde{t}_*(z)$ имеет вид

$$\tilde{t}_*(z) = \sqrt{z}(\tilde{u}_*(z) + \tilde{v}_*(z)),$$

а разность $t_* - \tilde{t}_*$ удовлетворяет уравнению

$$t_*^3 - \tilde{t}_*^3 - z(t_* - \tilde{t}_*) + t_*^3(e^{1/t_*^2 - 1/x^2} - 1) = 0.$$

С учетом разложений (20), (21) это дает

$$(t_*(z) - \sqrt{z}(\tilde{u}_*(z) + \tilde{v}_*(z)))f(z) + g(z) = 0,$$

где функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют ветвления 2-го порядка в точке $z_1(x)$. Возвращаясь к функции $F_*(z; x)$, видим, что после обхода точки $z_1(x)$ эта функция изменит свое значение, а после повторного обхода примет первоначальное значение, т.е. $z_1(x)$ – ветвление 2-го порядка функции $F_*(z; x)$. В проколотой окрестности $z_1(x)$ имеем разложение

$$F_*(z; x) = A_1(x) \left(1 - \frac{z_1(x)}{z}\right)^{-1/2} + \dots,$$

где $A_1(x) \neq 0$. Аналогичное разложение имеет место в проколотой окрестности точки $z_{\pm}(x)$ (при подходе к разрезам). Учитывая общую теорему, получаем (32), (33).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда точка x принадлежит дополнению области G_1 , значение корня $z_1(x)$, не являясь максимальным по модулю, остается наибольшей по модулю особой точкой производящей функции $F_*(z; x)$, так как при однократном обходе каждой из точек $z_{\pm}(x)$, эта функция не изменит своего значения.

Применим формулы сильной асимптотики (32), (33) для нахождения распределения нулей полиномов $Q_{2n}^*(x)$, при $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть задана весовая функция $w(z)$ (см. (8)); при этом $\alpha = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ и β_1 – вещественное число. Запишем полиномы $Q_{2n}^*(x)$ в виде

$$\begin{aligned} Q_{2n}^*(x) &= k_{2n,2n} \prod_{j=1}^{2n} (x - x_{j,2n}) = k_{2n,2n} Q_{2n,+}^*(x) Q_{2n,-}^*(x), \\ Q_{2n,+}^*(x) &= \prod_{\substack{1 \leq j \leq 2n \\ \operatorname{Re}(x_{j,2n}) > 0}} (x - x_{j,2n}), \quad Q_{2n,-}^*(x) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq 2n \\ \operatorname{Re}(x_{j,2n}) < 0}} (x - x_{j,2n}). \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда предельное множество нулей полиномов $Q_{2n,\pm}^*(x)$ (см. (38)) есть $\gamma_{\pm}$.

Знание главного члена асимптотического разложения (т.е. функции $z(x)$) позволяет описать предельное распределение нулей $Q_{2n}^*(x)$ в терминах теории потенциала. По определению логарифмический потенциал меры $\mu(x)$ равен

$$V_{\mu}(x) = \int \ln \frac{1}{|x - t|} d\mu(t).$$

Пусть ν_{2n} – вероятностная мера, равномерно распределенная в нулях многочлена $Q_{2n}^*(x)$, т.е.

$$\nu_{2n}(x) = \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq j \leq 2n} \delta(x - x_{j,2n}).$$

Потенциал меры ν_{2n} равен

$$V_{\nu_{2n}}(x) = -\frac{1}{2n} \ln \left| \frac{Q_{2n}^*(x)}{k_{2n,2n}} \right|, \quad (39)$$

где $k_{2n,2n}$ – старший коэффициент многочлена Q_{2n}^* . Теорема 2.5 дает нам

$$\frac{1}{n} \ln |Q_{2n}^*(x)| = \ln |z_1(x)| + o(1), \quad (40)$$

равномерно на компактных подмножествах области G . Учитывая (39), (40) и условие нормировки (12), будем иметь

$$V_{\nu_{2n}}(x) = -\frac{1}{2} \ln |z_1(x)| + \frac{1}{2n} \ln |k_{2n,2n}| + o(1). \quad (41)$$

Обозначая через $\nu_{n,\pm}(x)$ меры распределения нулей многочленов $Q_{2n,\pm}^*(x)$ (см. (38)), из (41) будем иметь

$$\frac{1}{2} V_{\nu_{n,+}}(x) + \frac{1}{2} V_{\nu_{n,-}}(x) = -\frac{1}{2} \ln |z_1(x)| + \frac{1}{2} \ln \frac{27}{4} + o(1).$$

Это дает нам в силу симметрии (при $n \rightarrow \infty$)

$$V_{\nu_{n,+}}(x) \rightarrow -\ln |z_+(x)| + \ln \frac{27}{4}, \quad x \in \gamma_+, \quad V_{\nu_{n,-}}(x) \rightarrow -\ln |z_-(x)| + \ln \frac{27}{4}, \quad x \in \gamma_-,$$

что означает слабую сходимость мер.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **157**, Наука, М., 1981, 31–48.
- [2] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386.
- [3] J. Nuttall, “Hermite–Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface”, *J. Approx. Theory*, **32**:3 (1981), 233–240.
- [4] A. I. Aptekarev, H. Stahl, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials”, *Progress in Approximation Theory* (Tampa, FL, March 1990), Springer Ser. Comput. Math., **19**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1992, 127–164.
- [5] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1976.
- [6] Г. Сёге, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [7] A. I. Aptekarev, F. Marcellan, I. A. Rocha, “Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi–Bessel polynomials”, *J. Approx. Theory*, **90**:1 (1997), 117–146.
- [8] P. Appell, “Sur une suite des polynômes ayant toutes leur racines réelles”, *Arch. Math. Phys.*, **1**:3 (1901), 69–71.
- [9] N. Chosh, “On a generalization of Legendre polynomials”, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **21** (1929), 144–154.
- [10] Г. К. Энгелис, “О полиномах, заданных формулой Родрига”, *Ученые записки Латв. ГУ*, **20**:3 (1958), 137–143.
- [11] В. А. Калягин, “Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности”, *Матем. сб.*, **110**:4 (1979), 609–627.
- [12] V. Kaliaguine, A. Ronveaux, “On a system of “classical” polynomials of simultaneous orthogonality”, *J. Comput. Appl. Math.*, **67**:2 (1996), 207–217.
- [13] В. Н. Сорокин, “О совместных аппроксимациях Паде в случае конечных и бесконечных интервалов”, *Изв. вузов. Матем.*, **8** (1984), 45–52.
- [14] В. Н. Сорокин, “Обобщение классических ортогональных многочленов и сходимость совместных аппроксимаций Паде”, *Труды сем. им. И. Г. Петровского*, 1986, № 11, 125–165.
- [15] В. Н. Сорокин, “Асимптотическое поведение линейных форм с полиномиальными коэффициентами для некоторых функций стилтесовского типа”, *Сиб. матем. журн.*, **27**:1 (1986), 157–169.
- [16] В. Н. Сорокин, “О совместных аппроксимациях Паде функций стилтесовского типа”, *Сиб. матем. журн.*, **31**:5 (1990), 128–137.
- [17] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.

Р. Э. Ахмедов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

03.04.2006

Исправленный вариант

24.01.2007