Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Батыршин, Относительная перечислимость
в иерархии Ершова, *Матем. заметки*, 2008, том 84, вы-
пуск 4, 506–515

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm6135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:03:31

Относительная перечислимость в иерархии Ершова

И. И. Батыршин

В работе приводятся результаты, касающиеся обобщений на другие уровни иерархии Ершова некоторой теоремы о связи n -вычислимой перечислимости и относительной перечислимости.

Библиография: 6 названий.

В работах [1]–[3] Ершовым была введена и изучена одна иерархия подмножеств натурального ряда ω , являющаяся некоторым обобщением иерархии n -в.п. множеств в случае $n < \omega$. В работах [4] и [5] была установлена интересная связь понятий n -вычислимой перечислимости и относительной перечислимости, а именно, была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть B – ω -в.п. множество, C – в.п. относительно некоторого $A <_T C$ и $B \leq_T C$. Тогда существует такое d -в.п. множество D , что $B \leq_T D \leq_T C$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Любая 2-СЕА, ω -в.п. степень является d -в.п. степенью.

В данной работе приводятся результаты, касающиеся обобщений этой теоремы на другие уровни иерархии Ершова.

Для удобства обозначений ограничимся рассмотрением клиниевской системы обозначений для конструктивных ординалов $(\mathcal{O}, <_{\mathcal{O}})$. Напомним определение классов Σ_a^{-1} , Π_a^{-1} , Δ_a^{-1} иерархии Ершова в этом случае. Пусть даны $a \in \mathcal{O}$ и перечислимая a -последовательность в.п. множеств $\mathcal{R} = \{R_x\}_{x <_{\mathcal{O}} a}$ (т.е. предикат “ $y \in R_x$ ” вычислимо перечислим и, если $x <_{\mathcal{O}} y$, то $R_x \subseteq R_y$). Полагаем

- $S_a(\mathcal{R}) = \{z \mid (\exists x <_{\mathcal{O}} a)[z \in R_x \ \& \ e(x) \neq e(a) \ \& \ (\forall y <_{\mathcal{O}} x)[z \notin R_y]]\}$,
- $P_a(\mathcal{R}) = \omega - S_a(\mathcal{R})$,

где $e(x)$ – функция четности на $\mathcal{O}$, т.е. $e(x) = 0$, если x – четный элемент порядка $(\{y \mid y \leq_{\mathcal{O}} a\}; <_{\mathcal{O}})$, и $e(x) = 1$ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $a \in \mathcal{O}$, обозначим через Σ_a^{-1} класс всех множеств вида $S_a(\mathcal{R})$, где $\mathcal{R}$ пробегает все перечислимые a -последовательности в.п. множеств.

Соответственно, Π_a^{-1} – класс всех множеств вида $P_a(\mathcal{R})$.

Обозначим $\Delta_a^{-1} \doteq \Pi_a^{-1} \cap \Sigma_a^{-1}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00605).

Мы будем говорить, что некоторое множество $A \in \Sigma_a^{-1}$ является собственно Σ_a^{-1} -множеством, если

$$(\forall b <_{\mathcal{O}} a)(\forall B \in \Sigma_b^{-1})(A \not\leq_T B).$$

Через $|x|_{\mathcal{O}}$ будем записывать ординал, обозначением которого является x .

Пусть ε_0 есть предел последовательности $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$. Тогда любой ординал $\alpha < \varepsilon_0$ можно представить в нормальной форме:

$$\alpha = n_1 \cdot \omega^{\beta_1} + n_2 \cdot \omega^{\beta_2} + \dots + n_k \cdot \omega^{\beta_k}, \quad \alpha > \beta_1 > \dots > \beta_k, \quad n_1, \dots, n_k < \omega.$$

В частности, для $\alpha < \omega^\omega$ имеем $\alpha = n_0 \cdot \omega^m + \dots + n_{m-1} \cdot \omega + n_m$. Это представление будет играть существенную роль в нашем доказательстве.

В работе [3] Ершовым была доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. *Множество A есть ω -в.н. множество, если и только если $A \in \Delta_a^{-1}$, где $|a|_{\mathcal{O}} = \omega$.*

Таким образом, теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $B \in \Delta_a^{-1}$, C – в.н. относительно некоторого $A <_T C$ и $B \leq_T C$. Тогда существует такое множество $D \in \Sigma_2^{-1}$, что $B \leq_T D \leq_T C$.*

В теореме 4 доказывается обобщение теоремы 3 на классы множеств Δ_{v_n} , где v_n , $n > 1$, – произвольные обозначения для ω^n соответственно.

ЛЕММА 1. *Если $|a|_{\mathcal{O}}$ – предельный ординал, то любое $B \in \Sigma_a^{-1}$ принадлежит классу Δ_a^{-1} тогда и только тогда, когда существует перечислимая последовательность $\mathcal{R}$ такая, что $B = S_a(\mathcal{R})$ и $\bigcup_{b <_{\mathcal{O}} a} R_b = \omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. предложение 1 в [6].

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $n > 1$, если $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, $B \in \Delta_v^{-1}$, A – в.н. множество, $B \leq_T A \oplus W^A$, то существует такое множество $D \in \Sigma_c^{-1}$, где $c <_{\mathcal{O}} v$ и $|c|_{\mathcal{O}} = \omega^n$, что $B \leq_T D \leq_T A \oplus W^A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы выберем перечислимую последовательность $\mathcal{R}$ такую, что $B = S_v^{-1}(\mathcal{R})$ и $\bigcup_{a <_{\mathcal{O}} v} R_a = \omega$. Теперь для любого $x \in \omega$ найдется такой шаг s , что $x \in R_{a,s}$ для некоторого $a <_{\mathcal{O}} v$.

Пусть $B = \Phi^{A \oplus W^A}$ для некоторого частично-вычислимого функционала Φ .

Построим перечислимую последовательность $\mathcal{Q}$ такую, чтобы множество $D = S_c(\mathcal{Q})$ удовлетворяло условиям теоремы.

Мы будем кодировать $B(x)$ в D , перечисляя в D числа

$$\langle x, 0, 0 \rangle, \quad \langle x, 0, 1 \rangle, \quad \langle x, 1, 0 \rangle, \quad \langle x, 1, 1 \rangle, \quad \dots, \quad \langle x, i, 0 \rangle, \quad \langle x, i, 1 \rangle$$

для $i \leq m$ ($\langle x, i, 1 \rangle$ для информации $x \in B$, $\langle x, i, 0 \rangle$ для информации $x \notin B$). Требуемую информацию мы будем получать на шагах s , на которых

- 1) $x \in R_{a,s}$ для некоторого $a <_{\mathcal{O}} v$,
- 2) $\Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [s] = e(a)$.

Единственной проблемой является возможность дожидаться выполнения условия 2). Эта проблема решается следующим образом с помощью хорошо известного приема “hat trick” Лахлана.

Пусть A – в.п. множество, $\{A_s \mid s \in \omega\}$ – его вычислимая аппроксимация, тогда

$$\widehat{\Phi}_{e,s}^{A_s} = \begin{cases} \Phi_{e,s}^{A_s}, & \text{если } \Phi_{e,s}^{A_s} \downarrow \ \& \ \phi_{e,s}(A_s) < a_s, \\ \uparrow & \text{в ином случае,} \end{cases}$$

где $a_s = \min\{s, z : z \in (A_s - A_{s-1})\}$,

$$\widehat{\phi}_{e,s}(A_s) = \begin{cases} \phi_{e,s}(A_s), & \text{если } \widehat{\Phi}_{e,s}^{A_s} \downarrow, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Шаг s называется *A-истинным шагом*, если $A_s \upharpoonright a_s = A \upharpoonright a_s$. Легко видеть, что для любого бесконечного множества существует бесконечно много истинных шагов.

Смысл “hat trick” заключается в следующем: если s – A -истинный шаг и $\widehat{\Phi}^A(y)[s]$ определена, тогда $\Phi^A(y) \downarrow$. Это следует из того, что $\widehat{\Phi}^A(y) \downarrow [s]$, только если брать $\phi(A, y)$ меньше, чем a_s , и так как s – истинный шаг, то $A_s \upharpoonright \phi_s(A, y) = A \upharpoonright \phi_s(A, y)$.

Пусть W_e^A – относительно в.п. множество, и пусть $\langle A_s \mid s \in \omega \rangle$ и $\langle W_{e,s}^A \mid s \in \omega \rangle$ – вычислимые аппроксимации A и W_e^A соответственно. Тогда положим

$$\widehat{W}_e^A[s] = \{x \mid \widehat{\Phi}_e^A(x)[s]\}.$$

Из определения видно, что на любом A -истинном шаге s выполнено $\widehat{W}_e^A[s] \subseteq W_e^A$. Так как A и множество A -истинных шагов имеют одинаковую тьюринговую степень, то можно сказать, что мы всего лишь заменили W_e на другой в.п. оператор $W_{f(e)}$ такой, что $W_{f(e)}^A = W_e^A$, и на всех A -истинных шагах s имеем $W_{f(e)}^A[s] \subseteq W_e^A$, причем это можно сделать равномерно по индексу A . Поэтому для любых A и W мы можем рассматривать $A \oplus W^A$ как $A \oplus \widehat{W}^A$ с естественной нумерацией $\widehat{W}^A$. На практике, мы можем без потери общности предположить, что на всех A -истинных шагах выполнено $W^A[s] \subseteq W^A$. Для нас это означает, что если $\Phi^{A \oplus W^A}$ всюду определена, то для любого $x \in \omega$ существует бесконечно много шагов s , на которых

$$((A \oplus W^A) \upharpoonright \phi^+(x))[s] = (A \oplus W^A) \upharpoonright \phi^+(x),$$

где ϕ^+ определяется следующим образом.

Пусть A – в.п. множество и $\Phi^{A \oplus W_i^A}(x) \downarrow [s]$, тогда

$$\phi^+(x, s) = \max(\{\phi(A \oplus W_i^A, x)[s]\} \cup \{\phi_i(A, y)[s] \mid y \in W_i^A \upharpoonright \phi(A \oplus W_i^A, x)[s]\}).$$

Выберем вычислимую аппроксимацию для множества B : положим $B_s(x) = 1$, если $x \in R_{a,s}$ для такого $a <_\mathcal{O} v$, что

- 1) $e(a) = 1$;
- 2) $(\forall b <_\mathcal{O} a)(x \notin R_{b,s})$,

и $B_s(x) = 0$ в ином случае.

Определим также следующую функцию, которая будет использоваться в нашей конструкции:

$$u(x, s) = \begin{cases} \uparrow, & \text{если } \Phi^{A \oplus W^A}(x) \neq B(x)[s], \\ u(x, t), & \text{если } \Phi^{A \oplus W^A}(x) = B(x)[s] \\ & \text{и } (\exists t < s)(A \oplus W^A)[t] \upharpoonright \phi^+(x, t) = (A \oplus W^A)[s] \upharpoonright \phi^+(x, t), \\ \max(\{\phi^+(x)[t] + 1 \mid t \leq s\}) & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Опишем стратегию построения множества D .

Фиксируем произвольный $x \in \omega$. Ждем шага s_0 , на котором

- (1) $x \in R_{a_0, s_0}$,
- (2) $|a_0|_{\mathcal{O}} = m_0 \cdot \omega^n + \beta_0$ для некоторого $\beta_0 < \omega^n$,
- (3) $\Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [s_0] = e(a_0)$,

и перечисляем $\langle x, 0, e(a_0) \rangle$ в Q_{b_0} , где $b_0 <_{\mathcal{O}} c$ и $|b_0|_{\mathcal{O}} = 2\beta_0 + 1$. В дальнейшем ждем такого шага $s_1 > s_0$, что

- (1) $x \in R_{a_1, s_1}$,
- (2) $|a_1|_{\mathcal{O}} = m_0 \cdot \omega^n + \beta_1$, где $\beta_1 < \beta_0$, $e(a_1) \neq e(a_0)$,
- (3) $\Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [s_1] = e(a_1)$.

Если такой шаг наступит, то перечисляем $\langle x, 0, e(a_1) \rangle$ в Q_{b_0} и кладем $\langle x, 0, e(a_0) \rangle$ в Q_{b_1} , где $b_1 <_{\mathcal{O}} b_0$ и $|b_1|_{\mathcal{O}} = 2\beta_0$. Если позже появится такой шаг $s_2 > s_1$, что

- (1) $x \in R_{a_2, s_2}$,
- (2) $|a_2|_{\mathcal{O}} = m_0 \cdot \omega^n + \beta_2$, где $\beta_2 < \beta_1$, $e(a_2) = e(a_0) \neq e(a_1)$,
- (3) $\Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [s_2] = e(a_0)$,

то кладем $\langle x, 0, e(a_1) \rangle$ в Q_{b_1} и $\langle x, 0, e(a_0) \rangle$ в Q_{b_2} , где $b_2 <_{\mathcal{O}} b_1$ и $|b_2|_{\mathcal{O}} = 2\beta_0 - 1$.

Мы продолжаем подобным образом манипулировать с числами $\langle x, 0, 0 \rangle$ и $\langle x, 0, 1 \rangle$ до тех пор, пока не дождемся такого шага $t_0 > s_j$ для любого j , что

- (1) $x \in R_{n, t_0}$,
- (2) $|n|_{\mathcal{O}} = m_1 \cdot \omega^n + \delta_0$, $\delta_0 < \omega^n$, $m_1 < m_0$,
- (3) $\Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [t_0] = e(n)$.

Если такой шаг наступит, то перечисляем $\langle x, 1, e(n) \rangle$ в Q_d , где $d <_{\mathcal{O}} c$ и $|d|_{\mathcal{O}} = 2\delta_0 + 1$. В дальнейшем продолжаем ту же процедуру, манипулируя с маркерами $\langle x, 1, 0 \rangle$ и $\langle x, 1, 1 \rangle$, если x перечисляется в множества вида R_k , где $|k|_{\mathcal{O}} = m_1 \cdot \omega^n + \delta$.

Если позже x перечислится в множество вида R_l , где $|l|_{\mathcal{O}} = m_2 \cdot \omega^n + \delta$ и $m_2 < m_1$, то повторяем аналогичные действия с маркерами $\langle x, 2, 0 \rangle$ и $\langle x, 2, 1 \rangle$ и т.д.

Если в процессе наших вычислений найдутся три таких шага $v < t < s$, что $u(x, s) \downarrow = u(x, v)$ и $u(x, t) \downarrow \neq u(x, v)$, то на шаге s восстанавливаем значения $D_s(\langle x, i, j \rangle) = D_v(\langle x, i, j \rangle)$ для всех i, j , использованных в вычислении, путем перечисления этих маркеров в соответствующие Q_n , $n <_{\mathcal{O}} c$.

КОНСТРУКЦИЯ МНОЖЕСТВА D . Построение множества D будем проводить по шагам. На каждом шаге $s' = \langle x, s \rangle$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$ строим множества $Q_{x, y, s}$ так, что каждое из них конечно и $Q_{x, y, s} \subseteq Q_{x, y, s+1}$. На этих шагах в $Q_{x, y, s}$ будем класть только элементы вида $\langle x, i, j \rangle$, где $i \in \omega$ и $j \in \{0, 1\}$. Будем также считать, что для любого шага $\langle x, s \rangle$ существует не более одного такого $z <_{\mathcal{O}} v$, что $x \in R_{z, s}$.

Опишем конструкцию на шагах вида $\langle x, s \rangle$, $s \in \omega$, для произвольного фиксированного x . В силу равенства $B = \Phi^{A \oplus W^A}$ и леммы 1 существует такой шаг $t(x)$, что $x \in R_{a, t(x)}$ для некоторого $a <_{\mathcal{O}} v$ и

$$\Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [t(x)] = e(a).$$

Пусть $s_0(x)$ – наименьший из таких шагов и $x \in R_{a_0, s_0(x)}$, где $|a_0|_{\mathcal{O}} = m_0 \cdot \omega^n + \beta_0$, $\beta_0 < \omega^n$. Шаг $s_0(x)$ можно найти эффективно, так как $\mathcal{R}$ – перечислимая последовательность. Кроме этого будем строить вспомогательную вычислимую функцию θ , определяя на каждом шаге $\langle x, s \rangle$ значение $\theta(x, s)$.

Шаг $s' = \langle x, 0 \rangle$. Полагаем $Q_{x, y, 0} = \emptyset$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$. Определяем $\theta(x, 0) = 0$.

Шаг $s' = \langle x, s \rangle$, где $0 < s < s_0(x)$. Полагаем $Q_{x,y,s} = Q_{x,y,s-1} = \emptyset$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$, определяем $\theta(x, s) = 0$.

Шаг $s' = \langle x, s_0(x) \rangle$. Полагаем $Q_{x,b_0,s_0(x)} = \{\langle x, 0, e(a_0) \rangle\}$, где $b_0 <_{\mathcal{O}} c$ и $|b_0|_{\mathcal{O}} = 2\beta_0 + 1$. Полагаем $Q_{x,y,s_0(x)} = Q_{x,y,s_0(x)-1}$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$, $y \neq b_0$. Определяем

$$\theta(x, s_0(x)) = \langle m_0, b_0, d_0, e(a_0), e(a_0), 0 \rangle, \quad \text{где } |d_0|_{\mathcal{O}} = \beta_0.$$

Шаг $s' = \langle x, s \rangle$, где $s_0(x) < s$. Пусть

$$\theta(x, s-1) = \langle m, b, d, e1, e2, n \rangle.$$

1. Если существуют два таких шага t, v , что $v < t < s$,

$$u(x, s) \downarrow = u(x, v), \quad u(x, t) \downarrow \neq u(x, v) \quad \text{и} \quad \forall w (t < w < s \rightarrow u(x, w) \neq u(x, v)),$$

то делаем следующее.

Пусть $\langle x, i_1, j_1 \rangle, \langle x, i_2, j_2 \rangle, \dots, \langle x, i_l, j_l \rangle$ – все такие числа, что $i_k < n$ и

$$D_v(\langle x, i_k, j_k \rangle) \neq D_{s-1}(\langle x, i_k, j_k \rangle), \quad 1 \leq k \leq l.$$

Пусть $b_k <_{\mathcal{O}} c$ такие, что

$$\langle x, i_k, j_k \rangle \in Q_{x,b_k,s-1} \quad \text{и} \quad (\forall a <_{\mathcal{O}} b_k)(\langle x, i_k, j_k \rangle \notin Q_{x,a,s-1}).$$

Полагаем $Q_{x,c_k,s} = Q_{x,c_k,s-1} \cup \{\langle x, i_k, j_k \rangle\}$, где $|b_k|_{\mathcal{O}} = |c_k|_{\mathcal{O}} + 1$, для всех $1 \leq k \leq l$.

2. Проверяем выполнение какой-нибудь из следующих групп условий. В силу принятого ранее предположения (для любого шага $\langle x, s \rangle$ существует не более одного такого $z <_{\mathcal{O}} v$, что $x \in R_{z,s}$) выполнится не более одной группы условий.

Первая группа условий:

- (1) $x \in R_{a,s}$,
- (2) $|a|_{\mathcal{O}} = m \cdot \omega^n + \beta$, $\beta < |d|_{\mathcal{O}}$ и $e(a) = e1$.

В этом случае полагаем $Q_{x,y,s} = Q_{x,y,s-1}$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$ таких, что $y \neq c_k$, $1 \leq k \leq l$, и определяем

$$\theta(x, s) = \langle m, b, d', e1, e2, n \rangle, \quad \text{где } |d'|_{\mathcal{O}} = \beta.$$

Вторая группа условий:

- (1) $x \in R_{a,s}$,
- (2) $|a|_{\mathcal{O}} = m \cdot \omega^n + \beta$, $\beta < |d|_{\mathcal{O}}$, $e(a) \neq e1$.

Если кроме этого выполнилось условие

$$(3) \Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [s] = e(a),$$

то делаем следующее. Определим $b' <_{\mathcal{O}} c$ из следующих условий.

Пусть $|b|_{\mathcal{O}} = \gamma + p$, $\beta = \gamma' + q$, где $p, q \in \omega$, γ, γ' – предельные ординалы и $\gamma, \gamma' < \omega^n$. Если $p \neq 1$, то определяем $|b'|_{\mathcal{O}} = \gamma + (p-1)$, если же $p = 1$, то полагаем $|b'|_{\mathcal{O}} = \gamma' + 2q + 1 + e(b)$.

Полагаем

$$Q_{x,b,s} = Q_{x,b,s-1} \cup \{\langle x, n, 1 - e2 \rangle\}, \quad Q_{x,b',s} = Q_{x,b',s-1} \cup \{\langle x, n, e2 \rangle\}.$$

Полагаем $Q_{x,y,s} = Q_{x,y,s-1}$ для всех таких $y <_{\mathcal{O}} c$, что $y \neq b, y \neq b'$ и $y \neq c_k$, $1 \leq k \leq l$. Определяем

$$\theta(x, s) = \langle m, b', d', 1 - e1, e2, n \rangle, \quad \text{где } |d'|_{\mathcal{O}} = \beta.$$

Если же условие (3) не выполнилось, то полагаем $Q_{x,y,s} = Q_{x,y,s-1}$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$, $y \neq c_k$, $1 \leq k \leq l$, и определяем

$$\theta(x, s) = \langle m, b, d', e1, e2 \rangle.$$

Третья группа условий:

- (1) $x \in R_{a,s}$,
- (2) $|a|_{\mathcal{O}} = m' \cdot \omega^n + \beta$, $m' < m$.

Если кроме этого выполняется условие

- (3) $\Phi^{A \oplus W^A}(x) \downarrow [s] = e(a)$,

то полагаем

$$Q_{x,b',s} = Q_{x,b',s-1} \cup \{ \langle x, n+1, e(a) \rangle \}, \quad \text{где } |b'|_{\mathcal{O}} = 2\beta + 1.$$

Полагаем $Q_{x,y,s} = Q_{x,y,s-1}$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$, $y \neq b'$ и $y \neq c_k$, $1 \leq k \leq l$. Определяем

$$\theta(x, s) = \langle m', b', d', e(a), e(a), n+1 \rangle, \quad \text{где } |d'|_{\mathcal{O}} = \beta.$$

Если же условие (3) не выполнено, то полагаем $Q_{x,y,s} = Q_{x,y,s-1}$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$, $y \neq c_k$, $1 \leq k \leq l$, и определяем

$$\theta(x, s) = \langle m', b'', d', e(a), 1 - e(a), n+1 \rangle, \quad \text{где } |b''|_{\mathcal{O}} = 2\beta + 2.$$

3. Если ни одно из условий пункта 2 не выполнилось, то полагаем $Q_{x,y,s} = Q_{x,y,s-1}$ для всех $y <_{\mathcal{O}} c$, $y \neq c_k$, $1 \leq k \leq l$, и определяем

$$\theta(x, s) = \theta(x, s-1).$$

Для всех $y <_{\mathcal{O}} c$ полагаем $Q_y = \bigcup_{x,s \in \omega} Q_{x,y,s}$. Полагаем

$$D = S_c(\mathcal{Q}), \quad \text{где } \mathcal{Q} = \{Q_y\}_{y <_{\mathcal{O}} c}.$$

Конец конструкции.

Докажем, что построенное множество удовлетворяет условиям теоремы.

ЛЕММА 2. *Выполнено $B \leq_T D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого x находим такое наибольшее $i \leq m_0$ (m_0 было определено в конструкции), что или $\langle x, i, 1 \rangle \in D$, или $\langle x, i, 0 \rangle \in D$. Теперь $x \in B$ тогда и только тогда, когда $\langle x, i, 1 \rangle \in D$.

ЛЕММА 3. *Выполнено $D \leq_T A \oplus W^A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $x \in \omega$ находим, используя вышеизложенный метод “hat trick”, наименьший s такой, что

$$(A \oplus W^A)[s][\phi^+(x, s)] = (A \oplus W^A)[\phi^+(x, s)] \quad \text{и} \quad \Phi^{A \oplus W^A}(x)[s] = B_s(x) = B(x).$$

Шаг s может быть найден эффективно с помощью оракула $A \oplus W^A$, так как $B \leq_T A \oplus W^A$.

Теперь $\langle x, i, j \rangle \in D$ тогда и только тогда, когда $\langle x, i, j \rangle \in D_s$. Отметим, что существует бесконечно много таких шагов $t > s$, что $u(x, t) \downarrow = u(x, s)$. Поэтому для всех маркеров значения $D(\langle x, i, j \rangle)$ будут восстановлены к значению $D_s(\langle x, i, j \rangle)$.

ЛЕММА 4. Для любого $x \in \omega$ изменение $B(x)$ на некотором шаге $s > s_0(x)$ может вызвать не более двух изменений $D(\langle x, i, j \rangle)$ для любых i, j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменения $D(\langle x, i, j \rangle)$ могут происходить по двум причинам:

А) Найдется $t > s$ такой, что на шаге $\langle x, t \rangle$ выполнится какое-либо из условий второго пункта конструкции.

Б) Найдутся такие $t_0 < t_1 < t_2$, что

$$1) u(x, t_0) \downarrow = u(x, t_2), u(x, t_1) \downarrow \neq u(x, t_0),$$

$$2) D_{t_0}(\langle x, i, j \rangle) = D_{t_1}(\langle x, i, j \rangle).$$

В этом случае выполнится первый пункт конструкции.

Покажем, что условие 2Б) не может быть вызвано изменением типа Б), т.е. не существует таких шагов $s < t < v < w$, что функция u на этих шагах определена и

$$u(x, s) = u(x, v) \neq u(x, t) = u(x, w).$$

Из равенства $u(x, s) = u(x, v)$ имеем

$$(A \oplus W^A)[\phi^+(x, s)][s] = (A \oplus W^A)[\phi^+(x, s)][v].$$

Так как $t < v$, то

$$A[\phi^+(x, s)][s] = A[\phi^+(x, s)][t].$$

Поэтому неравенство $u(x, s) \neq u(x, t)$ возможно, только если существует некоторый $y \in W^A[s] - W^A[t]$. Однако, так как y выходит из W^A на шаге v , то $A_t[\phi^+(x, t)] \neq A_v[\phi^+(x, t)]$ и, значит,

$$A_t[\phi^+(x, t)] \neq A_w[\phi^+(x, t)],$$

что противоречит условию $u(x, t) = u(x, w)$.

Поэтому условие 2Б) может выполняться, только если найдется такой шаг t , $t_0 < t < t_2$, на котором произошло изменение типа А).

Таким образом, изменение значения $D(\langle x, i, j \rangle)$ может произойти не более $2n$ раз, где n – число изменений типа А), и любое изменение типа А) может произойти только при очередном изменении $B(x)$.

Вышеприведенные леммы доказывают теорему.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая 2-СЕА, Δ_v^{-1} -степень является Σ_c^{-1} -степенью, где $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, $c <_{\mathcal{O}} v$ и $|c|_{\mathcal{O}} = \omega^n$, $n > 1$.

Возникает несколько естественных вопросов по поводу возможных обобщений данной теоремы:

- 1) Можно ли сохранить результат этой теоремы, если ослабить ее условия, заменив класс множеств Δ_v^{-1} на более общий класс Σ_v^{-1} ?
- 2) Можно ли усилить эту теорему, сделав множество D из условия принадлежащим классу Σ_a^{-1} для некоторого a такого, что $|a|_{\mathcal{O}} < \omega^n$?
- 3) Можно ли обобщить эту теорему на более высокий уровень иерархии Ершова – на уровень Δ_v^{-1} для некоторого v такого, что $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^\omega$?

Следующая теорема и ее следствие дают отрицательные ответы на первые два вопроса, а теорема 6 – отрицательный ответ на третий вопрос.

ТЕОРЕМА 5. Для любого $n > 0$, если $|a|_{\mathcal{O}} = \omega^n$, то существует собственно Σ_a^{-1} -множество B , вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{V_e\}_{e \in \omega}$ – каноническая нумерация класса Σ_a^{-1} , и пусть $V_e = S_a(R^e)$, где $R^e = \{R_x^e\}_{x <_{\mathcal{O}} a}$.

Пусть $(V_e, \Phi_e, \Psi_e)_{e \in \omega}$ – нумерация всех троек, состоящих из множества $V_e \in \Sigma_a^{-1}$ и частичновычислимых функционалов Φ_e, Ψ_e . Для построения собственно Σ_a^{-1} -множества $B = S_a(\mathcal{Q})$ достаточно для каждого $e \in \omega$ удовлетворить следующим требованиям:

$$T_e: \quad B \neq \Phi_e^{V_e} \quad \text{или} \quad V_e \neq \Psi_e^{B \oplus A} \quad \text{или} \quad (\exists y \in V_e)(\forall x <_{\mathcal{O}} a)(y \notin R_x^e).$$

Если для каждого e требование T_e будет удовлетворено, то для любого $V \in \Sigma_b^{-1}$, $|b|_{\mathcal{O}} < \omega^n$, будет выполняться $B \not\equiv_T V$. Это вытекает из леммы 1 и следующего очевидного утверждения: если $V \in \Sigma_b^{-1}$, то

$$(\forall c)(b <_{\mathcal{O}} c \rightarrow V \in \Delta_c^{-1}).$$

Таким образом, если $V \in \Sigma_b^{-1}$ для $b <_{\mathcal{O}} a$, то найдется такое $i \in \omega$, что $V_e = S_a(R^i)$ и $\bigcup_{x <_{\mathcal{O}} a} R_x^i = \omega$.

Вычислимой перечислимости B относительно A будем добиваться следующим образом: при перечислении какого-либо x в $Q_{i,s}$ при $e(i) = 1$ назначим ему маркер $\theta(x, s)$, а при следующем перечислении x в $Q_{j,t}$ при $s < t$, $j <_{\mathcal{O}} i$, $e(j) = 0$ перечислим одновременно $\theta(x, s)$ в A . После этого B перечисляется относительно A так: повторяем конструкцию, описанную ниже, пока какой-нибудь x не перечислится в некоторое $Q_{i,s}$ при $e(i) = 1$. Если $A_s \upharpoonright \theta(x, s) = A \upharpoonright \theta(x, s)$, то перечисляем x в B . Если нет, то процедура продолжается.

Для удовлетворения каждого требования T_e используется следующая стратегия.

1. Выбираем наименьшее число x , еще не использованное в конструкции и большее всех запретов, наложенных аналогичными стратегиями для требований с большим приоритетом. Полагаем запрещающую функцию $r(e, 0) = 0$.

2. Ожидаем наступления шага s_0 , на котором

$$0 = B(x) = \Phi_e^{V_e} \& V_e \upharpoonright \phi = \Psi_e^{B \oplus A \upharpoonright \psi_{s_0}} \& (\forall y < \phi)(\exists a_y^0 <_{\mathcal{O}} a)(y \in R_{a_y^0}^e)[s_0]. \quad (1)$$

Здесь $\phi = \phi(x, s_0) = u(V_{e, s_0}, e, x, s_0)$ – use-функция и

$$\psi_{s_0} = \max_{y < \phi(x, s_0)} (u(B \oplus A[s_0], e, y, s_0)).$$

Если (и пока) такое s_0 не найдется, T_e удовлетворено. Полагаем $r(e, s) = r(e, s-1)$ для всех $0 < s < s_0$ (если такое s_0 никогда не встретится, то для всех $s > 0$).

При наступлении такого шага s_0 (требование в этот момент становится нарушенным) выбираем все a_y^0 как наименьшие обладающие указанным свойством, полагаем $|g_0|_{\mathcal{O}}$ равным наименьшему нечетному ординалу, большему, чем $\sum_{y < \phi(x, s_0)} |a_y^0|_{\mathcal{O}}$, полагаем $\theta(x, s_0) = \psi_{s_0}$ и перечисляем x в множество Q_{g_0, s_0+1} . Теперь $1 = B(x) \neq \Phi_e^{V_e}$. Определяем запрещающую функцию $r(e, s_0) = \psi_{s_0} + 1$, требование T_e опять удовлетворено.

3. Ожидаем наступления шага s_1 такого, что

$$1 = B(x) = \Phi_e^{V_e} \& V_e \upharpoonright \phi_1 = \Psi_e^{B \oplus A \upharpoonright \psi_{s_1}} \& (\forall y < \phi_1)(\exists a_y^1 <_{\mathcal{O}} a)(y \in R_{a_y^1}^e)[s_1], \quad (2)$$

где a_y^1 опять выбирается как наименьшее, и $\phi_1 = \phi(x, s_1)$. Полагаем $r(e, s) = r(e, s-1)$ для всех $s_0 < s < s_1$ (если s_1 не наступит, то для всех $s > s_0$).

Шаг s_1 наступит, только если для некоторого $y_0 < \phi(x, s_0)$ выполнится $a_{y_0}^1 <_{\mathcal{O}} a_{y_0}^0$ и $e(a_{y_0}^1) \neq e(a_{y_0}^0)$ (отметим, что при этом $\sum_{y < \phi(x, s_0)} |a_y^1|_{\mathcal{O}} < \sum_{y < \phi(x, s_0)} |a_y^0|_{\mathcal{O}}$). Полагаем $|g_1|_{\mathcal{O}}$ равным наименьшему четному ординалу, большему, чем $\sum_{y < \phi(x, s_0)} |a_y^1|_{\mathcal{O}}$, перечисляем x в множество Q_{g_1, s_1+1} , $\theta(x, s_0)$ кладем в A и определяем запрещающую функцию $r(e, s_1) = \psi_{s_1} + 1$. При этом

$$(B \oplus A)[\psi_{s_0}[s_1]] = (B \oplus A)[\psi_{s_0}[s_0]].$$

Но $V_e(y_0)[s_1] \neq V_e(y_0)[s_0]$, поэтому второй конъюнкт нарушен. Требование T_e снова удовлетворено.

4. Ожидаем наступления шага s_2 , на котором снова выполнится условие (1). Полагаем $r(e, s) = r(e, s-1)$ для всех $s_1 < s < s_2$.

Условие (1) может выполниться только в том случае, если y_0 перечислится в некоторый $R_{a_{y_0}^2}^e$, где $a_{y_0}^2 <_{\mathcal{O}} a_{y_0}^1$ и $e(a_{y_0}^2) \neq e(a_{y_0}^1)$, иначе не выполнится второй конъюнкт. Аналогичным образом определяем g_2 , $\theta(x, s_2)$ и перечисляем x в множество Q_{g_2, s_2+1} . Заметим, что $\phi(x, s_2) = \phi(x, s_0)$, так как $V_{e, s_0}[\phi(x, s_0)] = V_{e, s_2}[\phi(x, s_0)]$. Кроме этого, в силу use-принципа $\psi_{s_2} = \psi_{s_0}$, поэтому запрещающая функция $r(e, s_2) = \psi_{s_2} + 1 = r(e, s_0)$.

5. Ожидаем наступления шага s_3 , на котором выполнится условие (2). Полагаем $r(e, s) = r(e, s-1)$ для всех $s_2 < s < s_3$.

Шаг s_3 наступит, только если некоторый $y < \phi(x, s_2) = \phi(x, s_0)$ перечислится в $R_{a_y^3}^e$, $a_y^3 < a_y^2$, $e(a_y^3) \neq e(a_y^2)$. Повторяем для шага s_3 действия, описанные в пункте 3 для шага s_1 .

Таким образом, выполнение условия (2) может происходить только при изменении $V_e(y)$ для некоторого $y < \phi(x, s_0)$, т.е. при уменьшении суммы $\sum_{y < \phi(x, s_0)} |a_y^0|_{\mathcal{O}}$, а выполнение (1) – только при изменении для того же самого y значения $V_e(y)$, т.е. опять же при уменьшении суммы. Поэтому последовательность $|g_i|_{\mathcal{O}}$ убывает при уменьшении i .

В дальнейшем все построение повторяется аналогичным образом.

Упорядочиваем требования в порядке приоритета: $T_0, T_1, \dots$. Заметим, что для любого $e \in \omega$ имеем $\lim_s r(e, s) < \infty$, так как $r(e, s) \neq r(e, s+1)$, только если $V_{e, s}(y) \neq V_{e, s+1}(y)$ для некоторого $y < \phi(x, s_0)$. Поэтому можно применить стандартную методику доказательства с конечными нарушениями, гарантирующую удовлетворение всех T_e вышеописанным способом.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любого $n > 0$, если $|a|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, то существует множество $B \in \Delta_a^{-1}$, вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$, такое, что

$$(\forall c <_{\mathcal{O}} b)(\forall C \in \Sigma_c^{-1})(B \not\equiv_T C), \quad \text{где } b <_{\mathcal{O}} a \text{ и } |b|_{\mathcal{O}} = \omega^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество B , построенное при доказательстве теоремы, является искомым.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^\omega$, тогда существует множество $B \in \Delta_v^{-1}$, вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$, такое,

что

$$(\forall b <_{\mathcal{O}} v)(\forall C \in \Sigma_b^{-1})(B \not\equiv_T C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_0 <_{\mathcal{O}} a_1 <_{\mathcal{O}} a_2 <_{\mathcal{O}} \dots <_{\mathcal{O}} v$ такие, что $|a_k|_{\mathcal{O}} = \omega^k$, пусть $\{V_{e,k}\}_{e \in \omega}$ – каноническая нумерация класса $\Sigma_{a_k}^{-1}$ для любого $k \in \omega$, и пусть $V_{e,k} = S_{a_k}(R_x^{e,k})$, где $R_x^{e,k} = \{R_x^{e,k}\}_{x <_{\mathcal{O}} a_k}$. Построение требуемого множества проводится аналогично построению из теоремы 5 с следующим небольшим дополнением.

1. Для требования

$$T_{e,k}: \quad B \neq \Phi_e^{V_{e,k}} \quad \text{или} \quad V_{e,k} \neq \Psi^{B \oplus A} \quad \text{или} \quad (\exists y \in V_{e,k})(\forall x <_{\mathcal{O}} a_k)(y \notin R_x^{e,k})$$

выбираем в качестве свидетеля наименьшее из чисел, еще не использованных в вычислении, большее всех запретов, и сразу перечисляем его в Q_t , где $|t|_{\mathcal{O}} = \omega^k + 2$.

2. Полностью повторяем вышеизложенную конструкцию.

Отметим, что для любых $\alpha_i < \omega^k$ конечная сумма $\sum_i \alpha_i < \omega^k$. Поэтому ординал g_j из конструкции мы всегда можем выбрать так, чтобы выполнялось

$$\sum_{y < \phi(x, s_0)} |a_y^j|_{\mathcal{O}} < |g_j|_{\mathcal{O}} < \omega^k + 2.$$

Если какое-то число z не было использовано в качестве свидетеля, но на каком-то шаге оказалось запрещенным, то перечисляем это число в Q_0 .

Таким образом, для любого $x \in \omega$ существует такой $t < v$, что $x \in Q_t$. В силу леммы 1 множество $B = S_v(Q)$ принадлежит классу Δ_v^{-1} .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств. I”, *Алгебра и логика*, **7:1** (1968), 47–74.
- [2] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств. II”, *Алгебра и логика*, **7:4** (1968), 15–47.
- [3] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств. III”, *Алгебра и логика*, **9:1** (1970), 34–51.
- [4] M. M. Arslanov, G. L. LaForte, T. A. Slaman, “Relative enumerability in the difference hierarchy”, *J. Symbolic Logic*, **63:2** (1998), 411–420.
- [5] M. M. Arslanov, “Degree structures in the local degree theory”, *Complexity, Logic, and Recursion Theory*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **187**, Dekker, New York, 1997, 49–74.
- [6] В. Л. Селиванов, “Об иерархии Ершова”, *Сиб. матем. журн.*, **26:1** (1985), 134–149.

И. И. Батыршин

Казанский государственный университет

Поступило

28.04.2005